第七章　正弦稳态分析

简介：

1．正弦波的应用：在电力、通讯与控制三大系统中，正弦波应用极为广泛，如：电力系统中的u、i；无线电中的高频载波均为正弦波。

2．周期性的非正弦交流信号可分解为一系列的正弦函数级数(傅立叶级数)

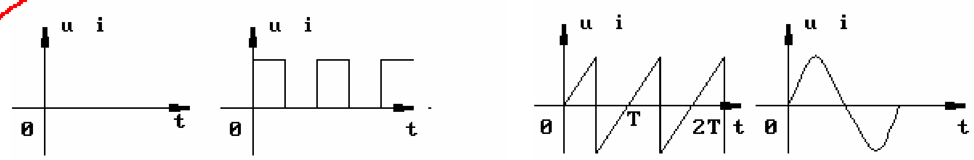
3．线性电路中，在同一频率的正弦信号激励下，各电压、电流响应也将是该频率的正弦量。

4．如果L、C在AC电路中，则L、C的VAR均具有微(积)分形式，那么AC稳态分析时是否也要建立微分方程呢？回答是否定的。

5．由于正弦量经加、减、微分、积分运算后仍为同频率正弦量，故利用“相量”来表征正弦量三个要素中的两个：振幅、相位，从而使电路方程变为相量(复数)代数方程，并且可以借用的DC分析方法。

§7—1　正弦电压和电流

一、时变的电压和电流



瞬时电压u、i　　周期性方波　　周期性斜波　　周期性交流电

周期性正弦交流量简称正弦信号。

随时间变动的电压和电流称为时变的电压和电流。

二、正弦量的三个要素

设正弦电压　　$u(t)=U_m\cos(wt+j_u)$

正弦电流　　$i(t)=I_m\cos(wt+j_i)$

说明：正弦量可用余弦函数表示，也可用正弦函数表示，本书用cos形式表示。

则：

$$\begin{cases} I_m、U_m \text{ —— (幅值)或振幅} \\ w \text{ —— 角频率} \\ j_i、j_u \text{ —— 初相位} \end{cases}$$

统称为正弦量的三个要素。

1、**角频率**w、**频率**f、**周期**T

T —— **正弦量变化一个周期所需的时间。**

f —— **每秒变化的周期数。**

故有： $f=\dfrac{1}{T}$

正弦量变化一周，cos**函数变化一周，即**$2p$**角。**

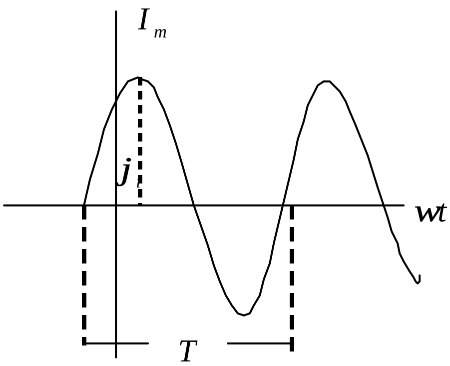
于是 $wT=2p$ $\Rightarrow$ $T=\dfrac{2p}{w}$ $f=\dfrac{w}{2p}$

或 $w=2p\ f=\dfrac{2p}{T}$**：单位时间内增加的相位角。**

单位： T —— sec **秒** ms、ms、ns

f —— Hz、KHz、MHz、GHz

$[Hz]=\dfrac{1}{[\sec]}$ w —— rad/s **弧度/秒**



f： **低频(音频)：** $\leq 20KHz$

中频： **几百**KHz

高频： **几**MHz

例：工频——大多数国家为 $50Hz$**，美、日等为** $60Hz$**。我国工频** $f=50Hz$ ，**则**$T=\dfrac{1}{f}=0.02S$，**由**$wT=2p$，**得**$w=2p\ f=314rad/s$。

2、**幅值(最大值)与有效值**

1) **有效值的定义：**P.145

若一个周期电流i**(不限于正弦)在一个周期** T **内流过某电阻** R **所产生的热量等于大小为** I **的直流电流在这段时间** T **内流过上述** R **所产生的热量，则** I **就定义为**i**的有效值。**

即： $\int_0^T i^2Rdt=\int_0^T I^2Rdt$ ， $I=\sqrt{\dfrac{1}{T}\int_0^T i^2dt}$

故有效值也称为方均根(rms**)值。**

★ **写法规定：**

瞬时值——用小写字母u、i、u_2**表示；**

有效值——用大写字母 U、I、U_2 表示；

最大值(幅值)——U_m、I_m、U_{2m} 表示。

★ 交流表：其 A、V 指示的往往为有效值，如：220V，380V。耐压值往往指最大值。

2) 正弦量最大值与有效值的关系

如：$i(t) = I_m \cos(wt + j_i)$，　　　　则：

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \cos^2(wt + j_i)\, dt}$$

$$= \sqrt{\frac{I_m^2}{T}\int_0^T [\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2wt + 2j_i)]\, dt}$$

$$= \sqrt{\frac{I_m^2}{T}[\frac{1}{2}T - 0]} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 I_m$$

同理：　　$U_m = \sqrt{2}U$

因此正弦函数常写为：

$i(t) = \sqrt{2}I\cos(wt + j_i)$，　　$u(t) = \sqrt{2}U\cos(wt + j_u)$ 等

3、初相位与相位差

1) $wt + j_i$ —— 相位角，反映正弦波变化的进程，也叫相角。

如：　$wt + j_i = 0^0$　　　则 $i = I_m$

　　　$wt + j_i = 60^0$　　　则 $i = 0.5I_m$

　　　$wt + j_i = 90^0$　　　则 $i = 0$

$w = \frac{d}{dt}(wt + j_i)$ —— 相角变化速度(角频率)。

2) 初相位：　$j_i = (wt + j_i)|_{t=0}$

相角、初相位的 SI 单位：弧度(rad)

常用单位：度($DEGREE$)，计算中注意必要的转换：

$2p$ 弧度 $= 360°$

初相位 j_i 取决于初始时刻的选取，计时起点不同，则初相不同。从波形上看：j_i ＝最大值与原点间的最近距离。图 7－2 中，若最大值在原点右边时，$j_i < 0$；若最大值在原点左边时，$j_i > 0$。为了使表达式唯一，通常在 $|j_i| \le p$ 的主值范围内取值。

3) 相位差 q

q ＝两同频率正弦量的相角之差。如：

$u(t) = U_m \cos(wt + j_u)$

$i(t) = I_m \cos(wt + j_i)$

则 u、i 之间的相位差：　$q_{ui} = (wt + j_u) - (wt + j_i) = j_u - j_i$

注意：不同频率时不可求 q，可见：q ＝同频率初相之差。

一些常见的相位关系：

$q > 0$ （$j_u > j_i$） —— u(**相位**)**超前于** i **,** i **滞后于** u

$q < 0$ （$j_u < j_i$） —— u **滞后于** i **,** i **超前于** u

$q = 0$ ——u 、 i **同相**

$q = \pm\frac{p}{2} = \pm 90^0$ —— u 、 i **正交**

$q = \pm p = \pm 180°$ —— u 、 i **反相**

一般 q **在** $|q| \le p$ **主值范围内取值**。

例： $i_1(t) = 10\cos(wt + 60°)$ A， $i_2(t) = 5\cos(wt - 150°)$ A， **求哪一个超前**？**多少度**？

解： $j_1 = 60°$ ， $j_2 = -150°$

$$q = j_1 - j_2 = 60° - (-150°) = 210°$$

主值范围： $q = 210° - 360° = -150°$

∴ i_1 **滞后** i_2 $150°$ ， i_2 **超前** i_1 $150°$

又：**问** i_1 、 i_2 **的有效值为多少**？

$$I_1 = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7.07 \text{ A}$$

$$I_2 = 0.707 \times 5 = 3.535 \text{ A}$$

练习：P.191 7－1

作业：P.217 7－1，**补充一题**。

补充：**试计算下列各正弦波的相位差**：

1、 $u = 10\cos(314t + 45°)V$ **和** $u = 20\cos(314t - 20°)V$ ；

2、 $u = 5\cos(20t + 5°)V$ **和** $i = 7\cos(30t - 20°)A$ ；

3、 $i = -5\sin(6pt + 10°)A$ **和** $i = 4\cos(6pt - 15°)A$ 。

§7 —2　相量法 相量图 有效值相量

目的：由 P.141 的例子可以看到：正弦函数(三角函数)的加、减等运算均很麻烦。当w不变时，我们可以只关心幅值与初相这两个要素，即引入“相量”。这样，正弦稳态电路的方程变为相量(复数)代数方程，可引用 DC 分析的各种方法。因涉及复数，故首先复习一下复数。

复数简介：

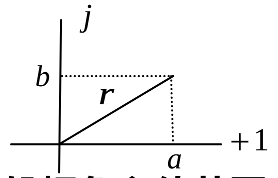
一、复数的几种形式

1．代数形式(直角坐标形式)

复数 $A=a+jb$，式中：$j=\sqrt{-1}$ 称为虚数单位，不用i表示，避免与电流i相混。

a：　称为A的实部
b：　称为A的虚部　均为实数，复矢量在实、虚轴上的投影

可将其在复平面上表示



$\text{Re}[A]=a$，$\text{Im}[A]=b$，一般幅角主值范围在$(-p,+p)$之间。

2．三角形式

“复矢量”的长度 r——称为A的模$(r>0)$；

复矢量与实轴的夹角y——称为A幅角的主值。

则　$A=a+jb=r\cos y+jr\sin y$

即　$A=r(\cos y+j\sin y)$

与代数形式的关系相比：

$$\begin{cases} a=r\cos y \\ b=r\sin y \end{cases} \quad \text{或} \quad r=\sqrt{a^2+b^2}, \quad y=arctg\frac{b}{a}$$

y所在象限由a、b的正、负号决定，而非$\frac{b}{a}$的正负号决定，例：$\pm 4\pm j3$

$\arg(4+j3)\leftrightarrow 36.9°$　　　$\arg(4-j3)\leftrightarrow -36.9°$

$\arg(-4+j3)\leftrightarrow 143.1°$　　　$\arg(-4-j3)\leftrightarrow -143.1°$

3．指数形式

利用欧拉公式：　$e^{jy}=\cos y+j\sin y$

可将复数$A=r(\cos y+j\sin y)$化为$A=r\,e^{jy}$。

4．极坐标形式

即指数形式简化记为： $A = r\angle y$

★利用计算器可将复数的代数形式与极坐标形式进行互换。(参考相关说明书)

二、复数运算

1、**加、减法宜用代数形式**

例： $A = a_1 + jb_1$ $\qquad B = a_2 + jb_2$

$$A \pm B = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$$

2、**乘、除法宜用极坐标形式**

例： $A = a_1 + jb_1 = \boldsymbol{r}_1\angle \boldsymbol{j}_1$ $\qquad B = a_2 + jb_2 = \boldsymbol{r}_2\angle \boldsymbol{j}_2$

$$AB = \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\angle \boldsymbol{j}_1 + \boldsymbol{j}_2$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\boldsymbol{r}_1}{\boldsymbol{r}_2}\angle \boldsymbol{j}_1 - \boldsymbol{j}_2$$ **(若用代数形式相当麻烦)**

例：求 $(3.2 + j7.5)(0.3 - j1.5)$

解：原式 $= 8.15\angle 66.9° \times 1.53\angle -78.7° = 12.5\angle -11.8° = 12.2 - j2.56$

例：求 $(-125 + j94.3)/(-25 - j10.5)$

解：原式 $= \dfrac{156.6\angle 143°}{27.1\angle -157°} = 5.78\angle 300°$

$$= 5.78\angle -60° = 2.89 - j5$$

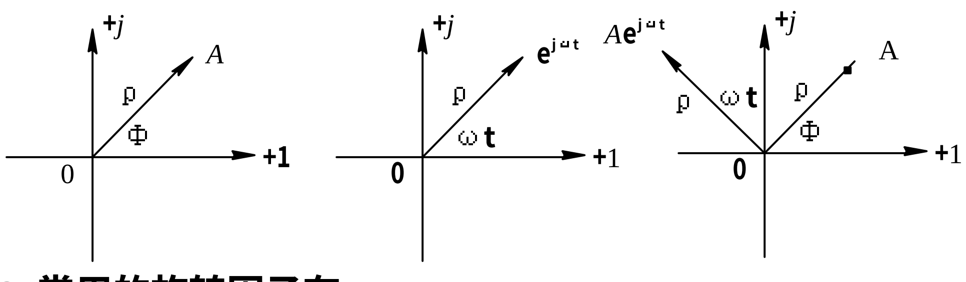
三、旋转因子和旋转矢量

1、 ∵ $e^{jwt} = 1\angle wt$

即 e^{jwt} **的模为** 1，**幅角** wt **随** t **增长而↗，此复数矢量在复平面上以角速度** w **逆时针旋转，故称之为旋转因子。**

2、 Ae^{jwt} **称为旋转矢量。设** $A = r\angle wt$

则： Ae^{jwt} **表示将** A **逆时针旋转一角度** wt **，模放大** r **倍。**



3.**常用的旋转因子有：**

$e^{j\frac{p}{2}} = \cos\dfrac{p}{2} + j\sin\dfrac{p}{2} = j$ ， $e^{-j\frac{p}{2}} = -j = 1\angle -\dfrac{p}{2}$ ，**即：** $1\angle \pm 90° = \pm j$

$e^{\pm jp} = -1$ ，**即** $1\angle \pm 180° = -1$

可见： j、**-**j、**-**1 **均可记为旋转因子。**

四、利用相量表示正弦交流量

设正弦电流 $i(t)=I_m\cos(\omega t+\theta_i)$

根据欧拉公式：$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$　　　令：$\theta=\omega t+\theta_i$

我们可以把复指数函数

$$
\begin{aligned}
I_m e^{j(\omega t+\theta_i)} &= I_m[\cos(\omega t+\theta_i)+j\sin(\omega t+\theta_i)] \\
&= I_m\cos(\omega t+\theta_i)+jI_m(\sin\omega t+\theta_i)
\end{aligned}
$$

很明显，上式的实部恰好是正弦电流$i(t)$，即：

$$i(t)=\mathrm{Re}[I_m e^{j(\omega t+\theta_i)}]=I_m\cos(\omega t+\theta_i) \qquad (*)$$

这样，我们就把正弦交流电与复指数函数联系起来，为用复数表示正弦交流电找到了途径。一个正弦波是由振幅、频率和初相位三个要素所决定。如前所述，在频率相同的正弦电源激励下，电路各处的响应电流和电压的频率是相同的。所以，在正弦稳态响应的三要素中，我们只需要确定它们的幅值和初相位两个要素。把式(*)进一步写成：$i(t)=\mathrm{Re}[I_m e^{j(\omega t+\theta_i)}]=\mathrm{Re}[I_m e^{j\theta_i}e^{j\omega t}]=\mathrm{Re}[\dot{I}_m e^{j\omega t}]$　　(**)

式中：

1．$Re[\ \ ]$为取“实部”的运算符。

2．$\dot{I}_m$为能反映正弦量幅值与初相位的“复常数”，称为正弦量$i(t)$的“振幅相量”，也称为最大值相量。

即：

$$\dot{I}_m=I_m e^{j\theta_i}=I_m\angle\theta_i \qquad (***)$$

$i(t)=\mathrm{Re}[\dot{I}_m e^{j\omega t}]$ —— 复变量(旋转矢量)的实部。

下面我们来看一下几何意义，

复变量$U_m e^{j(\omega t+\varphi)}$可用复平面上的向量来表示，如P.144图7－6所示，向量的模为U_m，幅角为$(\omega t+\varphi)$。这个向量在复平面上以原点为中心按角速率ω逆时针方向旋转，所以也称旋转向量，此旋转向量任何时刻在实轴上的投影正好等于该时刻电流$u(t)$的瞬时值。

讨论：为什么引用相量来表示正弦量呢？

因为在单一频率正弦电源激励的电路中，各部分都是与电源频率相同的正弦量，因而在分析时，常常只需确定最大值(振幅)或有效值和初相位两个要素，而复数$\dot{I}_m$的模是正弦电流的幅值，幅角是正弦电流的初相角。这正好是我们感兴趣的正弦交流电的两个要素。为了把这样一个能表示正弦交流电的复数与一般的复数相区别，把它叫做相量，并在符号上加上一点以示与I_m相区别。$\dot{I}_m$称为电流相量。

可见：

1．**振幅相量$\neq$正弦量，但有对应关系。**

2．**振幅相量反映了振幅与初相位两个要素。**

3．**旋转因子$e^{j\omega t}$反映另一个要素ω。**

类似地：$\because I=\dfrac{1}{\sqrt{2}}I_m$，**将**$\dot{I}=Ie^{j\varphi_i}=I\angle\varphi_i$**定义为"有效值相量"，简称相量。**

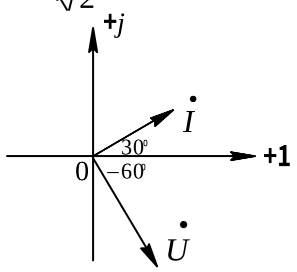
有：
$$\dot{I}=\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{I}_m \qquad \text{或} \qquad \dot{I}_m=\sqrt{2}\,\dot{I}$$

相量$\dot{I}$可用图表示，这种图称为相量图，如图 7－5 **所示。**

例：已知$i(t)=141.4\cos(\omega t+30^\circ)$ A，$u(t)=311.1\cos(\omega t-60^\circ)$ V

求：$\dot{I}$、$\dot{U}$，**并作相量图。**

解：$\dot{I}=\dfrac{141.4}{\sqrt{2}}\angle 30^\circ$ A，$\dot{U}=\dfrac{311.1}{\sqrt{2}}\angle -60^\circ=220\angle -60^\circ$ V



例：已知：$f=1000Hz$，$\dot{I}=0.5\angle -30^\circ A$。**求**$i(t)=?$

解：$\omega=2\pi f=6280 rad/s \quad \Rightarrow \quad i(t)=0.5\sqrt{2}\cos(6280t-30^\circ)A$

五、正弦相量的基本运算

用相量形式替代正弦量，运算会有很多便利之处。

1．**相同频率正弦量的加减运算。**

设：
$$i_1=\sqrt{2}I_1\cos(\omega t+\varphi_1)A$$
$$i_2=\sqrt{2}I_2\cos(\omega t+\varphi_2)A$$

求： $i=i_1+i_2$

解： $i_1=\mathrm{Re}[\sqrt{2}\,\dot{I}_1 e^{j\omega t}] \qquad i_2=\mathrm{Re}[\sqrt{2}\,\dot{I}_2 e^{j\omega t}]$

从而
$$i=i_1+i_2=\mathrm{Re}[\sqrt{2}\,\dot{I}_1 e^{j\omega t}]+\mathrm{Re}[\sqrt{2}\,\dot{I}_2 e^{j\omega t}]$$
$$=\mathrm{Re}[\sqrt{2}(\dot{I}_1+\dot{I}_2)e^{j\omega t}]$$

可见：两个同频率正弦量相加仍为同频率的正弦量。

令：$i=\mathrm{Re}[\sqrt{2}\,\dot{I}\,e^{j\omega t}]$ **则有：**$\mathrm{Re}[\sqrt{2}\,\dot{I}\,e^{j\omega t}]=\mathrm{Re}[\sqrt{2}(\dot{I}_1+\dot{I}_2)e^{j\omega t}]$

上式对任何时刻t**均成立，故有：**$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2$

同理　若：$i_3 = i_1 - i_2$，则有　$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2$

结论：正弦量的加(减)对应为其相量间的加减，从而复杂的三角运算转化为复数的代数运算。

例： $i_1 = 70.7\sqrt{2}\cos(\omega t + 45°)A$，$i_2 = 42.4\sqrt{2}\cos(\omega t - 30°)A$，**求** $i = i_1 + i_2$。

解： $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 70.7\angle 45° + 42.4\angle -30°$

$$= (50 + j50) + (36.7 - j21.1)$$

$$= 86.7 + j28.8 = 91.4\angle 18.4°\ A$$

∴　$i(t) = 91.4\sqrt{2}\cos(\omega t + 18.4°)A$

亦可用相量图定性分析

推论： KCL：　$\sum i_k = 0 \rightarrow \sum \dot{I}_k = 0$

KVL：　$\sum u_k = 0 \rightarrow \sum \dot{U}_k = 0$

形式一致，但 $i_k \neq \dot{I}_k$，$u_k \neq \dot{U}_k$，**只是对应关系。(基尔霍夫定律的相量形式)**

2、**正弦量的微分、积分运算**

设 $i(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \varphi_i)A$，**则** $\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}[\sqrt{2}I\cos(\omega t + \varphi_i)] = \frac{d}{dt}[\mathrm{Re}(\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t})]$

$$= \mathrm{Re}[\frac{d}{dt}(\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t})] = \mathrm{Re}[\sqrt{2}(j\omega\dot{I})e^{j\omega t}]$$

上式表明：正弦量的一阶导数仍为一个同频率的正弦量，其相量等于原正弦量的相量乘以 $j\omega$，**即：相量的模为原来相量的** ω **倍，初相超前于原相量** 90^0，**即** $\frac{di}{dt}$ **的相量为** $j\omega\dot{I} = \omega I\angle(\varphi_i + 90°)$。

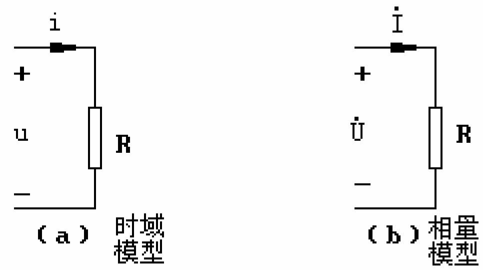
类似地：　$\int i(t)dt$ **的相量为** $\frac{1}{j\omega}\dot{I} = \frac{I}{\omega}\angle(\varphi_i - \frac{\pi}{2})$。

作业： P.191　7－2，7－3，7－4。

§7－3　三种基本元件伏安关系的相量形式

为了利用相量进行正弦稳态分析的需要，本节将导出 R、L、C **三种基本元件伏安关系的相量形式。**

一、电阻元件



电阻元件

在正弦电路中，流经电阻元件的电流及其端电压，在关联参考方向下，服从欧姆定律

$$u_R = Ri_R$$

设电流　　$i_R = \sqrt{2}I\cos(wt + j_i)$

则其电压

$$u_R = Ri_R = \sqrt{2}RI\cos(wt + j_i) = \sqrt{2}U_R\cos(wt + j_u)$$

上式表明，线性电阻的电压与电流是同频率的正弦量，且相位相同： $j_u = j_i$。

电压和电流的有效值有如下关系：

$U_R = RI$　　**（满足欧姆定律）**

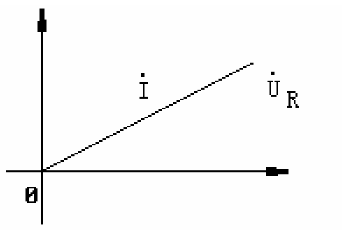
同理振幅有：　　$U_{Rm} = RI_m$

若用相量表示　　$\dot{I} = I\angle j_i$　　$\dot{U} = U\angle j_u$

可得：　　$\dot{U} = R\dot{I} = RI\angle j_i$　　**或**　$\dfrac{\dot{U}}{\dot{I}} = R$　　$\begin{cases} U = RI \\ j_i = j_u \end{cases}$

可以看出：上式既反映了u、i**有效值之间的关系，同时又表明了**u、i**之间的相位关系。**

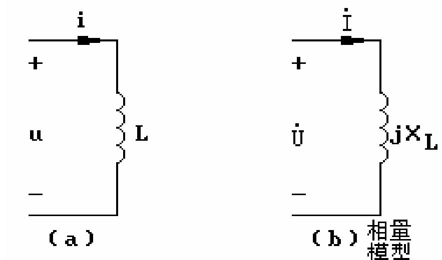
图(b)、(c)**画出了电阻元件的电压、电流波形图及相量图，**



(c)

在相量图上，电压相量和电流相量是共线的，指向同一"方向"。（同相关系）

二、电感元件



电感元件

取 L **的** u_L 、 i **方向关联，则有：** $u_L = L\dfrac{di}{dt}$

在正弦稳态的工作条件下，当电压、电流都用相量表示后，这一微分关系可以转换为代数关系。

设： $i = \sqrt{2} I \cos(wt + j_i)$ **则**

$$\dot{I} = Ie^{jj_i} = I\angle j_i$$

$u = \sqrt{2} U_L \cos(wt + j_u)$ **则**

$$\dot{U}_L = U_L e^{jj_u} = U\angle j_u$$

于是有：

$$\mathrm{Re}[\sqrt{2}\dot{U}_L e^{jwt}] = L\frac{d}{dt}[\mathrm{Re}(\sqrt{2}\dot{I}\ e^{jwt})] = L\,\mathrm{Re}[\frac{d}{dt}\sqrt{2}\dot{I}\ e^{jwt}]$$

$$= L\,\mathrm{Re}(jw\sqrt{2}\dot{I}\ e^{jwt}) = \mathrm{Re}(jwL\sqrt{2}\dot{I}\ e^{jwt})$$

从而有 $\dot{U}_L = jwL\dot{I} = jX_L\dot{I}$ **(*)**

这就是 L **元件的** VAR **的相量形式**

$$U_L\angle j_u = wLI\angle j_i + 90°$$

即： $\begin{cases} U_L = wLI \\ j_u = j_i + 90° \end{cases}$ **电流相位滞后电压** $90°$

$\dfrac{U_L}{I} = wL = X_L$， **称为"感抗"，单位"Ω"，阻止电流流过的能力。**

讨论： 1) X_L **与频率成正比**

w **大** $\rightarrow$ X_L **大** ；

w **小** $\rightarrow$ X_L **小**

$w = 0$ $\rightarrow$ $X_L = 0$ (L **对应于** DC，**短路**)

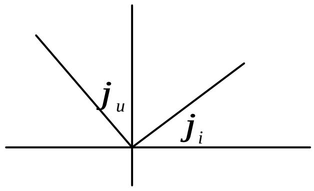
$w \rightarrow \infty$ $\rightarrow$ $X_L \rightarrow \infty$ $\rightarrow$ L **相当于开路**

2) $X_L = \dfrac{U}{I} = \dfrac{U_m}{I_m} \neq \dfrac{u}{i}$

3) $B_L = -\dfrac{1}{X_L} = -\dfrac{1}{wL}$ (**称为感纳，单位"** S **"**)

于是有：$\dot{I} = jB_L \dot{U}_L$

由 $\dot{I} = \dfrac{\dot{U}_L}{jX_L}$，画出电感元件的电压、电流波形图及相量图。

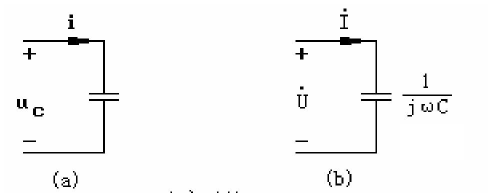


三、电容元件

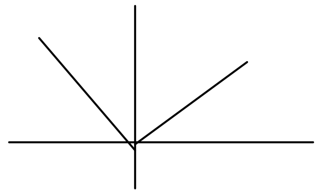
取 u_c、i 关联，$i = C\dfrac{du_c}{dt}$

电容元件的 VAR 与电感元件的 VAR 存在对偶关系，因此电容电压相量与其电流相量之间的关系为：$\dot{I} = j\omega \dot{U}_c$

或 $\dot{U}_c = \dfrac{1}{j\omega C}\dot{I} = -j\dfrac{1}{\omega C}\dot{I} = jX_c \dot{I}$



电容元件



即相量形式如图(b)所示

$$\begin{cases} I = \omega C U_c \\ \varphi_i = \varphi_u + 90^\circ \end{cases}$$

电容的 i 超前 u $\dfrac{\pi}{2}$。

上图画出了电容元件的电压、电流波形图及相量图。

$-\dfrac{1}{\omega C} = X_c$，容抗。单位"$\Omega$"，$X_c$ 与 ω 成反比

ω 大 $\to$ X_c 小

ω 小 $\to$ X_c 大

$\omega = 0$ $\to$ $X_c \to \infty$ ；开路，隔直

$\omega \to \infty$ $\to$ $X_c = 0$ ；短路，通交

记：$B_c = -\dfrac{1}{X_c} = \omega C$，容纳。单位"$S$"

有：$\dot{I} = jB_c \dot{U}_c$

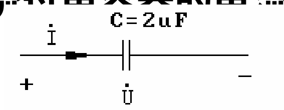
类似于，有 $\dot{I} = G\dot{U}$

R、L、C 是电路中三个最基本的无源元件，它们在正弦激励下的

解：

∴

例 2：已知一电容器的电容为 ，加在电容器两端的电压为 ，初相为 ，角频率为 。试求流过电容器的电流，写出其瞬时值表达式，并画出相量图。



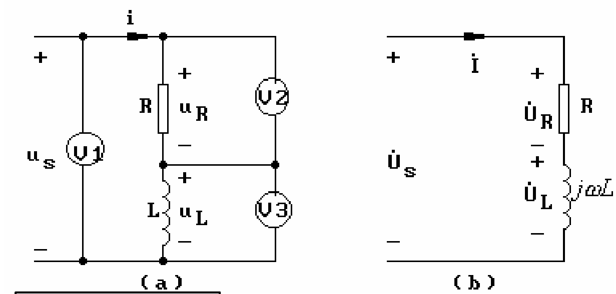
解：

，

∴ =

∴

例 3：一有耗线圈的模型如图(*a*)所示，已知正弦电源的频率 。求： 、 、 ，并画出相量图。



解：1) 令 作为参考相量

2) 利用 *VAR* 特性：

由 *KVL* 有：

∴

∴

3) 写出 ， ，

对于比较简单电路，也可不必用复数，直接根据相量图的几何关系求解。对于本例，从相量图也可求解。P.150 **图** 7－11(b)

从相量关系看，为与的代数和；在相量图上，是与所构成直角三角形的斜边。有：

∴

∴

结果与上同。

如果在电源、电阻 R **和电感** L **两端分别接上电压表，如图**(a)**所示，则读数为** 34.8 V，**读数为** 197.1 V。**初学者往往容易错认为为，而实际上为** 200V。**因为一个回路各部分电压的有效值通常不满足于** KVL。**同理，汇集在节点处的电流有效值通常不满足** KCL。

在正弦交流电路中，它们的相量和、瞬时值的和才满足 KVL **和** KCL。

有效值： V

例：P．151（**例** 7－4）**图示电路，在时开关合上，求该** RC **电路在正弦电压源作用下的瞬态响应**。

§7—4　阻抗和导纳及其等效电路

一、阻抗和导纳

R、L、C 的 VAR 相量形式(前提是参考方向关联)

把元件在正弦稳态时的电压相量与电流相量之比，定义为该元件的阻抗，记为 Z。

即：　(※)

则　R、L、C 三种基本元件的相量关系式可归结为：

有：　；　；

式(※)称为欧姆定律的相量形式，把阻抗的倒数定义为导纳，记为 Y，

即：　或　(西门子)

相应的，存在另一种相量关系：

于是　；　；

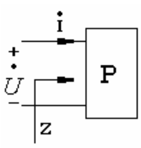
其中：电感的导纳　，其中　，电感的电纳，简称“感纳”

感纳与感抗的关系

同样的：电容的导纳　，其中　，电容的容纳，

容纳与容抗的关系

综上可知，对于一个由串联元件组成的二端网络 P，其入端阻抗为：



若由并联元件组成的二端网络 P，其入端等效导纳为：

、　分别为组成该网络各元件的阻抗和导纳。

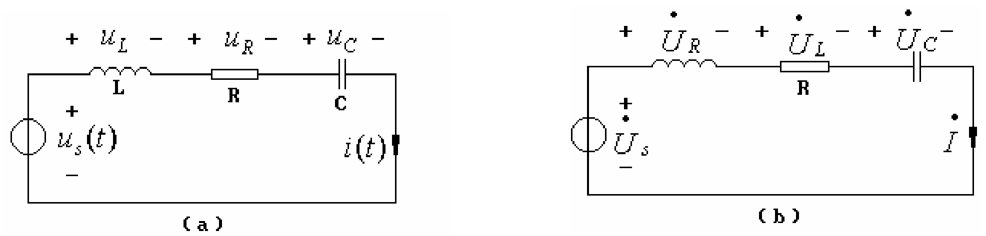
需要强调指出：用复数形式表示的电压及电流相量代表了随时间按正弦规律变化的正弦量，而复数形式的阻抗和导纳则仅表示电压相量

和电流相量之间的关系，它本身并不代表正弦量。

例：RLC 串联电路，已知 ，

。求电流以及各元件的电压。(P.155 例 7－6)

解：运用相量分析，可分三个步骤



1) 写出已知正弦量的相量，即

2) 做出原电路对应的相量模型(见图 b)。根据相量模型，仿照电阻电路的分析方法，对相量进行计算。

该 RLC 串联电路的总阻抗为：

故：

3) 由求出相量写出相应的正弦时间函数：

二、阻抗的性质

由 RLC 串联电路，有：

这里：R 为 Z 的实部(电阻)，X 为虚部(电抗)，$|Z|$ 为 Z 的模， 为阻抗角。阻抗的模等于可知稳态时端钮上正弦电压有效值(幅值)与电流

有效值(幅值)的比值，阻抗的幅角(阻抗角) 反映了电压与电流的相位关系。

;

;

若 ，即 感性

容性

纯电阻性 (串联谐振)

例如：设 ，即

则

∴

即：

三、导纳的性质

设 称为导纳角

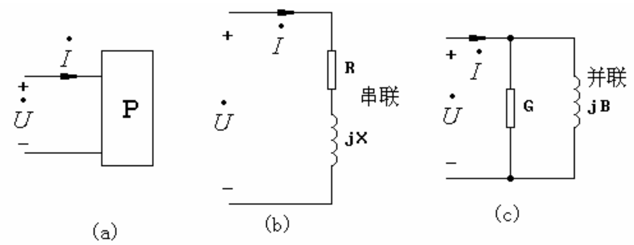
∵ ∴ 导纳角与阻抗角互为相反数。

于是： 容性

感性

阻性(并联谐振)

四、阻抗与导纳的等效互换



将二端网络 P 用一个等效阻抗 来表示，见图(b)

将二端网络 P 用一个等效导纳 来表示，见图(c)

(看作 G 和 B 的并联)

由于这两种等效电路有相同的 VAR， 显然有：

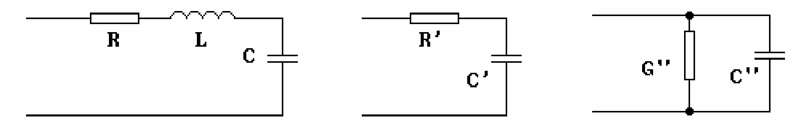
有：

即有：

对应地有：

例：有一 *RLC* 串联电路，　　　　　　　　　　　　　　　　　　　，
试求其串联、并联等效电路。

解：串联等效电路的阻抗为：



∴

并联等效电路的导纳可得：

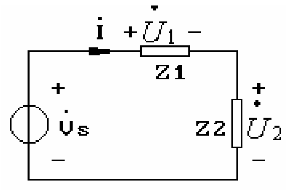
∵电纳为“＋”　　　∴　电路表现为容性

∵

∴

作业：　P. 191　7－5，7－6，7－7，7－8，7－12，7－14。

§7－5　　正弦交流电路的稳态分析



例1图

例 1：　为一感性阻抗元件，　为纯电阻元件，设在　　正弦交流的工作条件下，　可表示为　　　　与　　　　的串联，　　　　　　，外加电压　　　　　，求：工作电流　以及　、　上的电压

解：　　　　　，　　　　　　　　　　　　，

∴

令：

有：

即：

由于相位差是相对值，任意选择哪一个相量作为参考相量不会影响计算所得电路中各元件上电压、电流的大小及相互之间的关系。对于串联电路，各个元件上电压的相位都直接与电流的相位相联系，以　为参考相量，画相量图比较方便。

例 2：已知：

试用网孔电流法求图示电路中各支路电流。

解：先设网孔电流　　、　　，方向如图。列出网孔电流方程如下：

代入数据：

涉及复数运算：

故各支路电流为：

例3：**图示电路，已知：**

，

。**求：** 。

解：先求图中虚线框内的一端口网络的戴维南等效电路：

戴维南等效复阻抗 为：

组成等效电路如图，则 为：

回到原电路图，有

例 4：**图示电路，已知** ， 。**如果要求** **的相位差为** ，**试求**

解：**由** *KCL* **和** *KVL*：

可得：

要使 **的相位差为** ，**实部必须为** 0，**即**：

∴

，**电压** **的相位角为**

例 5：**如图电路，** **的读数分别为** 。**若** ，**求**： 。

解：**在串联电路，** **和** **的电流一致，根据电压表** **的读数及** **可求得** *I*，**如以** **为参考相量，则** ，**于是**：

由 *KVL*：**有**：

即：

两边实部相等：

两边虚部相等：

∴

∴ 有 (容性)

另一解答： ， 实部为负，即相当于负电阻，通常不予考虑。

例 6：含理想运放电路如图所示，已知： ，

， 。试求输出电压与输入电压之比 ，角频率为 。

解：由“虚短路”，可得： ，

又理想运放的输入端电流为零，对节点 3 列 KCL 得：

∵

∴

而

∴

利用节点法，对节点 1、2 列出节点方程，不得对输出节点列节点方程

代入数据：

将 代入，则

消去 得：

例 7：**图示电路，已知：** ， ， ， ，

， ， ， ，**求：** *a*、*b* **端口的等效电路。**

解：求解有源一端口电路的等效电路支路，可由多种方法分析，其方法与电阻电路类似。先画出电路的相量模型，如图(*b*)**所示：**

解法一：先求出 ，**然后用激励——响应法：**

1) **求** ，**列出节点方程为：**

整理化简得：

2) 求 ，(除源，激励——响应法)。由 KCL：

由欧姆定律： (此处用到并联等效公式)

简化：

从而有：

∴

解法二：一步法(不除源)

作业：P. 193　7－16(a)、(b)，7－17，7－18

§7－6 正弦稳态功率

正弦交流电路的功率、能量关系要比直流电路中复杂些。前面在分析元件的电特性时已指出，电阻是耗能元件；L、C 是储能元件，它们只和外电路进行能量交换。

一、电阻的平均功率

设通过电阻的电流为：

则

电阻吸收的瞬时功率为：

功率的波形如图 P.171 7－38(b)所示，可见电阻元件的瞬时功率 ，不出现负值。我们把瞬时功率在一个周期内的平均值称为平均功率，记为 P，即电阻元件的平均功率

通常所说的功率，指平均功率而言，平均功率又叫有功功率。

对于电阻元件：

可见，电阻平均功率的大小与电流的频率及初相角无关。

二、电感的平均储能

设：

则由 VAR：

瞬时功率：

功率波形见图 7－39(a)所示， 以 的角频率在横轴上下波动。

由于：

说明 L 在正弦激励时，电感吸收的平均功率为零。电感的瞬时储能为：

其波形如图 7－39(b)所示。

在任何时刻 ， ，平均储能为：

考察 ，可以看到：当 ，电感储能增大； ，电感储能减小。因此，在正弦稳态时，外电路(电源)与电感间存在着能

量不断交换的现象。为了表明这种能量交换(往返)的规模，把电感瞬时功率 的振幅定义为电感的无功功率，记作 ，单位“乏”(*var*)，即： 。

三、电容的平均储能

设：

则由 *VAR*：

瞬时功率：

功率波形如图 7－40(*a*)所示， 以 的角频率在横轴上下波动

由于 ，说明 *C* 在正弦激励时，电容吸收的平均功率为零，电容的瞬时储能为：

其波形如图 7－40(*b*)所示。

在任何时刻， ，电容平均储能为：

考察 ，当 ，电容储能增大； ，电容储能减小。因此：在正弦稳态时，外电路(电源)与电容间存在着能量不断交换的现象，为了表明这种能量交换(往返)的规模，把电容瞬时功率 的振幅定义为电容的无功功率，记作 ，单位“乏” (*var*)。即 。

例：求图示正弦稳态电路中电阻的平均功率，*L*、*C* 的平均储能以及 的无功功率。(P. 173)

解：计算 *L*、*C* 的阻抗： ，

按相量模型，列出网孔电流方程

解得：

电阻的平均功率： ；

电感的平均储能：

电容的平均储能：

式中：

∴

电容 支路的电流为：

∴

四 无源二端网络的平均功率 视在功率和功率因数

前面已讨论了 R、L、C 的功率，下面将要研究无源二端网络的功率。

对于无源二端网络 N ：

不妨设 Z 的阻抗角为

设 (以 为参考相量)，则：

于是

波形图见 P.175 图 7－43

式中： 是端口电压与电流的相位差。可见，瞬时功率由恒定分量 和正弦分量 两部分组成。

在所假设的参考方向下： N 吸收功率

N 发出功率

有“＋”“－”，说明外电路和 N 之间有能量往返交换，这种现象是由储能元件造成。

其平均功率为上式中的常数项，即 。其中： 称为功率因数(记为 或)； 称为功率因数角。可见，只要 ，不同相， 的值就要在 乘积的基础上打上一个折扣(∵)

讨论：

1) 若 ，则： ， ，平均功率

2) 若 ，则： ， ，平均功率

3) 若 ，则：平均功率 ，

总之，只有 R 耗能。

∴ 无源二端网络的平均功率：

在电工技术中，把端钮电压、电流有效值的乘积 称为视在功率，记作 S，即： ，其单位为伏安(VA)。

因此，平均功率也可写为： 一般情况下：

S 物理意义：反映了电气器件、设备的容量。∵ 设备耐压有限，I也有限。

☆: 为功率因数角，可根据 判断 N 的性质。

当 时，二端网络 N 感性， 电压超前电流

当 时，二端网络 N 容性， 电压滞后电流

例：电路的相量模型如图所示，其中 ， 。已知：

。

求：该无源二端网络的平均功率 P。

解：两种方法

1) 对内部电阻进行计算。二端网络内部只有一个电阻，其平均功率

或

2) 以二端网络端钮电压和电流计算平均功率。

五. 提高负载功率因数的措施

1．必要性

正弦电路中，负载从电源接收的有功功率为 ，而

常用的负载如电机、日光灯等均为感性，功率因数 在 0.7～0.85 左右，较低，造成了两个问题：

1) 电源容量【 乘积值(额定值)】得不到充分利用。

2) 当线路电压(如 220*V*，380*V*)和负载获得的功率 *P* 一定时， 越低，则 越大，从而线路损耗越大。

2、解决方法(对于感性，工厂负载一般为感性)：一般负载都是感性的，即通常所说的功率因数角滞后。对于感性负载，提高 的最常用方法是采用并联电容器负载。

设有一电感性负载(如图用 *R*、*L* 串联来代表)，其端电压为 ，有功功率为 *P*，作出相量图如图，以电压相量 为参考相量，
由相量图可见：

1) ;

2) ，减小了功率损耗；

3) 并联 *C* 后，原负载的 不变，

，故 *P* 不变；

4) 不能太大，否则会出现过补偿
一般地，以 达到 0.9 左右为好。

※ 并联电容 *C* 的计算：

由相量图及投影

由 *VAR* 化简可得：

例：一个负载的电压 ，功率 ，功率因数 。欲将 提高到 ，试求： 已知 。

解：未接电容时，负载电流

功率因数角：

电流的无功分量：

并联电容后，线路电流

电流的无功分量：

∴

容抗

∴

六 复功率

设无源二端网络 N **的电压、电流相量为 ， ，**

为 的共轭复数，则

称为复功率，以 表示，即：

其中： ，称为无功功率。如果负载为感性， 为正值；如果负载为容性， 为负值。

显然， 的模等于视在功率：

复功率守恒： ( )

文字描述见：P. 177 **划线**

但是： 因为

例：P. 178 例 7－24(讲述“滞后”与“超前”的概念 P. 175)

七、正弦稳态最大功率传输定理

在电阻电路中，负载电阻从电源获得最大功率的条件是负载电阻等于电源内阻，此时称负载与电源匹配。动态电路在正弦稳态的工作条件下负载从电源获得最大功率的条件又是如何呢？分析如下：

设 ，

则

首先来看 和 的关系。由于 在上式分母中，故知 为任意值下， 时 达极大值，即： ；令 对 的导数为 0，即可得到 为最大值的条件：

， ∴

综上， 和 为给定的情况下，负载吸收最大功率的条件是：

， 。即： 。此时， 与 称为共轭匹配或称最佳匹配， 获得的最大功率为：

(可用戴维南定理求解)

例：图示电路，为使 获最大功率， 并求此时的最大功率

解：求负载获得最大功率这类问题，一般均采用戴维南定理。

1) 先将负载两端 A、B 断开，求 。由弥尔曼定理得：

2) **用外加电压源　(激励——响应法)**，**求** A、B **输入端的阻抗**　。

∴

3)　∴　　　　　　　　　　**时**，　**可获最大功率**，**此时**：

作业：　P. 193　7－20，7－21，7－22，7－23。

§7—7 非正弦交流电路分析

在电气工程、无线电、电机、电子工程中，除了前述正弦交流电路外，非正弦周期信号电路也经常遇到。本节主要讨论非正弦周期信号作用下线性电路的稳态分析。

一、非正弦交流电的分析方法

一个非正弦周期函数可以展开成傅里叶级数

其中：　可以是　或　，令周期为 T，则　。

式中：第一项　称为周期函数的恒定分量(或直流分量)；

第二项　称为一次谐波(或基波分量)，其周期或频率与原非正弦周期函数的相同；

第三项　称为二次谐波，频率为基波的两倍；

第　项　称为 K 次谐波，频率为基波的 K 倍，除基波外的谐波统称为高次谐波。

★ 傅里叶级数的确定：

；

因而一个周期性的非正弦交流信号可根据傅里叶级数理论可以先分解为恒定分量和许多不同频率的正弦波，然后依据叠加定理求解。

例：图示电路中，　，激励　的波形如图(b)所示，　，求稳态响应电流　。

解：把激励源　分解为傅里叶级数，得：

这里取到六次谐波，代入 ，有

1) 在 的作用下，电感相当于短路，故恒定电流分量

2) 在二次谐波 作用下，

∴

∴

3) 在四次谐波电压分量 作用下，

∴

∴

4) 在六次谐波电压分量 作用下，

∴

∴

由线性电路叠加定理

计算非正弦周期电路应注意

1) L、C 的电抗随 f 而变，不同谐波时对应的电抗不同；

2) 写最终结果时，应将各次谐波分量的瞬时值相加，而不是各次谐波的相量相加。同样，不同 f 下的复阻抗也不能放在一起运算。

二、非正弦交流电的有效值

对任何周期性的电压、电流，不论是正弦还是非正弦的，其有效值定义为：

式中， 泛指 或 ， 泛指 或 。

非正弦周期函数 可展开为傅里叶级数：

因此在计算有效值时将涉及四种形式的积分。

(1)

(2)

(3)

(4)

也就是说展开式中所有交叉乘积项在一周期内的积分均应为零，因此有效值为：

其中 、 、 分别为直流分量、基波、二次、……谐波的有效值。

对上例所求得的非正弦交流电，可得

则该非正弦电流有效值流过电阻 ，则它消耗的平均功率为：

三、非正弦交流电的平均功率

如果施加于二端网络的电压和电流均为非正弦交流电，并分别用傅里叶级数表示：

则该二端网络的平均功率为：

上式的计算涉及 、 乘积的展开式在一周期内的积分问题。显然，不同频率的谐波电压、电流乘积在一周期内的积分为零，即：

，m、n 为正整数，且

直流分量和任何谐波的乘积在一周期内的积分也为零。即

， k 为正整数

而同频率谐波电压、电流的乘积在一周期内的积分为：

即：等于各次谐波产生的平均功率 ；

两个直流分量乘积的积分也不为零，即：

∴

由此可知，非正弦交流电路的平均功率是各次谐波单独作用时所产生平均功率的总和。它表示频率不同的若干电流(电压)作用时，它们的功率为分别计算后相加的结果。不同频率的电压和电流乘积只能构成瞬时功率，不能构成平均功率。

例：图示二端网络的电压、电流为：

求电压、电流的有效值以及二端网络吸收的平均功率。

解：由给定的 、 可知各次谐波的有效值及平均功率：

， ，

， ， ，

， ，

， ， ，

∴

则：

作业：P.194 7－24，7－25(写在练习册上)。

§7－8　三相交流电路的基本知识

在具有多个正弦电源并按一定方式连接的电路中，若各个电源的频率相同而初相不同，工程上称其为多相制电路(多相系统)。前面讨论的正弦电路属于单相电路。按照相数不同，多相制有二相、三相、六相和十二相等。目前世界上各个国家的电力系统，绝大多数是三相制，这与三相制的优越性是分不开的。例如与单相比较，相同尺寸的发电机，采用三相方式可提高输出功率；输送相同的功率，采用三相制可节省导电材料。此外，三相电动机具有结构简单，价格低廉，维护方便，运行平稳等优点。

一、三相电路的基本概念

对称三相电源是由三个频率相同、幅值相等、初相依次相差　　的三个正弦电压源按一定方式连接而成。这三个电压源依次为 A 相、B 相、C 相，分别记作　、　、　，它们的瞬时值表达式为(以　为参考正弦量)：

或用相量表示为：

三相电压的波形图和相量图如下所示：

这样一组大小相等、相位彼此差　　的三相电源称为对称三相电源。通常把各相电压达到最大值的先后次序称为相序，分为正序或反序。在三相电路中，负载一般也是三相的。如果三个负载相等，则称为对称的三相负载。正常工作的三相电路电源总是对称的，而

负载则有对称的，也有不对称的。

二、三相四线制电路

1．三相电路的电源和负载的连接方式：星型形(Y 型)和与三角形(△型)连接。

2．中线(地线)和火线(相线)：P.185 图 7－52

三个电源的三个末端连接在一起，有一个公共点 ；同样，三个负载也有一个公共点 ， 和 称为中点或零点。电源和负载中点之间的连线 称为中线。一般三相电路的中线都接通大地，故又称为地线。

从三相电源的三个始端 引出，分别与三相负载的三个端点 相连接的导线称为火线或相线。

3．三相四线制：这种连接方式，电源和负载共有四根联线——三个火线一根地线，称为三相四线制。

4．相电压、线电压、相电流、线电流和中线电流。

火线与地线间的电压称为相电压。

火线与火线之间的电压称为线电压。

流经每一相负载的电流称为相电流。

流经火线上的电流称为线电流。

中线上的电流称为中线电流。

由 P.185 图 7－52 可知： ， ，

而中线电流

对于对称三相电路

则 、 、 也是对称的——大小相等，相位上也相差 。

从相量图(P.186 图 7－53)可明显看出：如果负载对称， ；如果负载不对称， 。

三、对称三相电路的电压及电流计算

1．负载为 Y 型：见图 7－54

在图示方向下，线电流直接流入每一相负载，故线电流等于相电流。即： （ 表示“线”， 表示“相”）

线电压和相电压之间的关系：

三个线电压也是对称的：　　超前于　　　，大小关系有：

∴　线电压、相电压的关系：

2、负载为△型：见图 7－55

对于三角型连接的负载，每一相负载都直接跨接在火线上，因而负载的相电压即等于线电压：

线电流和相电流的关系，可从相量图得出：

三个线电流是对称的：线电流　滞后于相电流　　　，大小关系有：

∴　线电流与相电流的关系为：

四、三相功率

：

1Y：

：

三相总功率为各相平均功率之和，即：

(*)

其中　为负载的功率因数角，即负载相电压与相电流的相位差，也即是负载阻抗的阻抗角。

2、对称的△型负载：

每相负载的平均功率为：

三相总功率为各相平均功率之和，即：

(**)

其中　的含义与式(*)相同。

式(*)与(**)完全相同。也就是说，不论 Y 型负载还是△型负载，三相总功率都等于线电压有效值、线电流有效值乘积的　倍再乘以功率因数　　。

3、对称三相电路总的瞬时功率是恒定的，等于三相电路总的平均功率 P。

证明如下：

∵

∴

例题：　　P. 189 **例** 7－29

练习：　P. 194　7－24，7－25，7－26

作业：　P. 194　7－26