第三章　电路的一般分析法

前面讲的等效变换法可用来：

$\begin{cases}\text{分析简单电路}\\ \text{使复杂电路的局部得到简化}\end{cases}$

而对于复杂电路的一般分析，就要采用“系统化”的普遍方法：

$\begin{cases}\text{系统化——便于编制程序}\\ \text{普遍性——适用于任何线性电路}\end{cases}$

总的思路(步骤)

1) 选择一组完备的独立变量，可选的电路变量有电流、电压；

$\begin{cases}\text{独立性——各变量不能相互表示}\\ \text{完备性——其它电压、电流可由它们表示}\end{cases}$

2) 由 *KVL*、*KCL* 及元件的 *VAR* 建立方程；

3) 求解方程得到这些独立变量，进而解出其它待求量。

电路的一般分析法主要有：

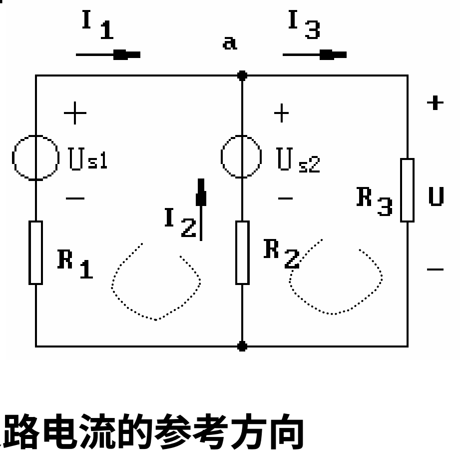
$\begin{cases}\text{支路法(支路电流法)：以支路的电流为变量，列写方程}\\ \text{回路法(网孔法)：以网孔电流为变量}\\ \text{结点法：以结点电压为变量}\end{cases}$

§3－1　支路电流法

以图示电路为例来说明支路法的应用。图中：支路数 b=3，结点数 n=2，回路数 l=3，网孔数 m=2。

原则：以支路的电流为变量，列写方程，求解电路参数。

支路电流法的步骤：



1) 在图中标出支路电流的参考方向

2) 列出(n－1)个独立结点的 *KCL* 方程，这里即

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0 \qquad (1)$$

3) 列出 m＝b－n＋1 个独立回路的 *KVL* 方程(每选一回路，均有新支路，通常可选网孔)

这里即： $$\begin{cases} R_1I_1 - R_2I_2 = U_{s1} - U_{s2} & (2) \\ R_2I_2 + R_3I_3 = U_{s2} & (3) \end{cases}$$

4) **联立求解这** b **个方程，得出支路电流，进而由支路** VAR **求出各元件电压降、功率等变量。**

例：上图中， $U_{s1} = 130V$，$U_{s2} = 117V$，$R_1 = 1\Omega$，$R_2 = 0.6\Omega$，$R_3 = 24\Omega$

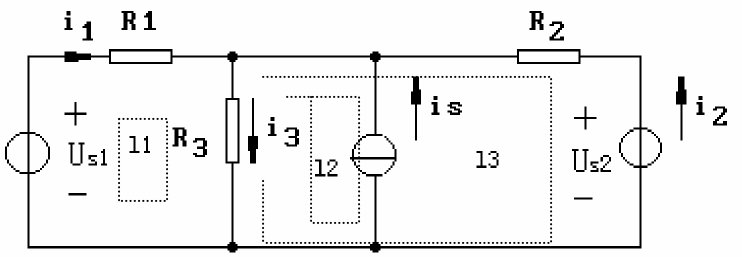
求： I_1，I_2，$P_{Us1吸}$，$P_{Us2吸}$。

解： $$\begin{cases} -I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ I_1 - 0.6I_2 = 130 - 117 \\ 0.6I_2 + 24I_3 = 117 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = 10A \\ I_2 = -5A \\ I_3 = 5A \end{cases}$$

$$P_{us1吸} = -U_{s1}I_1 = -1300W$$

$$P_{us2吸} = -U_{s2}I_2 = 585W$$

※ **电路中存在电流源，如下图。由于电流源所在支路的电流为已知，则待求支路电流少一个，为** $b-1=3$ **个。**



处理方法：

1) **列出**$(n-1)=1$ **个结点的** KCL **方程：** $I_1 - I_3 + I_S + I_2 = 0$

2) **选一组独立回路，使电流源仅包含在其中的一个回路中，即** l_1、l_2、l_3**列方程时，先列出**l_1**和**l_3**的** KVL **方程**

$$l_1: \quad I_1R_1 + I_3R_3 = U_{s1}$$

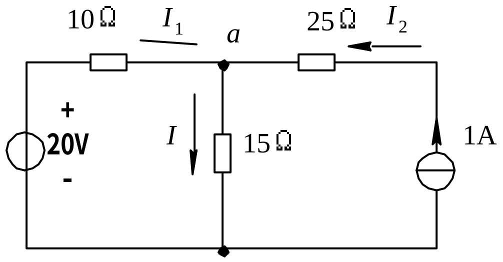
$$l_3: \quad -I_2R_2 - I_3R_3 = -U_{s2}$$

联立上面的 3 **个方程，求出未知量** I_1，I_2，I_3。

此外，也可以采用 P. 45 **例** 3－1 **中的方法，增设** I_S **的端电压**U_X **为未知量，再按一般支路法列出** b **个方程求解。**

☆ **当电流源有一电阻与之并联(称有伴电流源)通过电源等效变换成有伴电压源来取代，然后再列** KCL、KVL **方程，本图可首先求出** I_1、I_2，**回到原图，由** KCL **求出** I_3。

例：**电路如图所示，试求流经** 15Ω **电阻的电流** I 。



解：**先指定各支路电流的参考方向，** I_2 **即为电流源的电流值，所以**

$$I_2 = 1A$$

对结点 a **列** KCL **方程，有**：

$$-I_1 - I_2 + I = -I_1 - 1 + I = 0$$

对左面的网孔列 KVL **方程，有**： $10I_1 + 15I = 20$

解上述两个方程，有： $I = 1.2A$

例：P. 45 **例** 3－2

作业：P. 62　3－1(1)

§3－2　电路方程的独立电流变量和独立电压变量

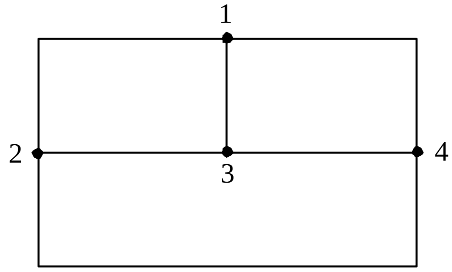
电路约束：元件 *VAR*

支路连接约束：网络拓扑——网络图论

这里介绍一些概念，从而了解一下电路方程的独立性

一、电路的图(线图)

电路的图是支路与结点构成的集合，其支路用线段表示。如：P. 49 **图** 3－10 **可用如下的图分析其拓扑结构。**

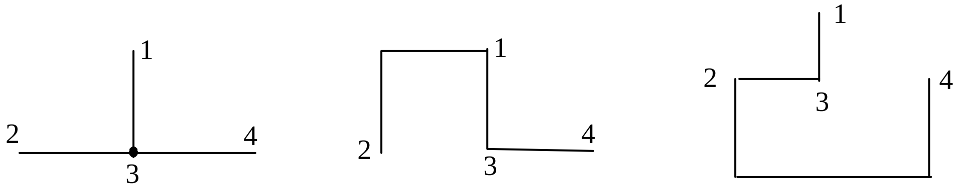


连通图(主要研究)：概念 P. 46

非连通图：图 3－4 (*c*)

二、树、树支、连支

1．**树：不包含回路，关联所有结点的支路集合，如上图的树有：**



同一网络的线图，树的结构很多，如上例，共有 16 **个树。**

2．**树支：构成树的支路，树支数**$=n-1$；

3．**树余：对应一个树的其余支路的集合；**

4．**连支：树余的支路。可见连支数：**$l=b-(n-1)=b-n+1$。

三、割集的概念(用Q_f **表示)**

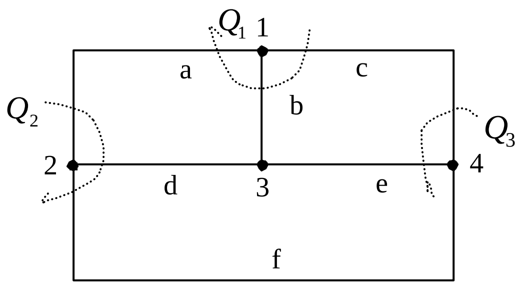
割集是指连通图中符合下列条件的支路的集合：

1．**当将该集合除去时，使连通图成为两个分离的部分**

2．**如只是少移去其中任何一条支路，图形仍然连通**

如下图：

$Q_1(a,b,c),\ Q_2(a,d,f)$ **构成割集，但**$Q_3(c,e)$ **不是割集。**



四、独立电压变量

只要选定一树，就可确定一组基本回路(单连支回路)，从而得到一组独立的回路，即可选树支电压为变量，$n-1$**个。**

五、独立电流变量

全部的连支电流为一组电路变量 $b-n+1$ **个。**

练习：P. 64　3－14

§3－3　网孔分析法和回路分析法

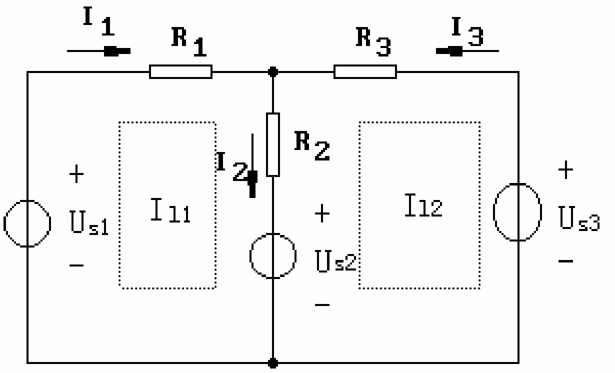
一、网孔分析法

1．网孔电流

1) **可以证明，在平面网络中的网孔数**$m=b-n+1$

2) **网孔电流——是一种沿着网孔边界流动的假想电流，如下图所示的**I_{l1}、I_{l2}。**这里网孔电流数＝网孔数，电路中所有的支路电流都可以用网孔电流来表示，即**$I_1=I_{l1}$　$I_3=-I_{l2}$　$I_2=I_{l1}-I_{l2}$。**此外，所有支路的电压都可以由网孔电流表示，所以网孔电流可做为独立的"电路变量"，个数为**$m=b-n+1$**个，比支路电流法**$(n-1)$**个，网孔方程少(只剩下**KVL)，**便于求解。**

为了求出网孔电流，关键要列出网孔方程。



2．网孔方程的规律

如上图，沿回路(网孔)绕行方向列写KVL，**得：**

$$\begin{cases}R_1I_{l1}+R_2I_{l1}-R_2I_{l2}=U_{s1}-U_{s2}\\R_2I_{l2}+R_3I_{l2}-R_2I_{l1}=U_{s2}-U_{s3}\end{cases}\qquad(*)$$

经整理得：

$$\begin{cases}(R_1+R_2)I_{l1}-R_2I_{l2}=U_{s1}-U_{s2}\\-R_2I_{l1}+(R_2+R_3)I_{l2}=U_{s2}-U_{s3}\end{cases}\qquad(**)$$

上式也可写成下面的形式：

$$\begin{cases}R_{11}I_{l1}+R_{12}I_{l2}=U_{s11}\\R_{21}I_{l1}+R_{22}I_{l2}=U_{s22}\end{cases}\qquad(***)$$

式中：R_{11}、R_{22}**分别成为网孔** 1、**网孔** 2 **的自电阻(恒正)，它们分别是各自网孔内所有电阻的总和。例如：**$R_{11}=R_1+R_2$，$R_{22}=R_2+R_3$。**而**R_{12}**称为网孔** 1 **和网孔** 2 **的互电阻(可正、可负)，它是该两个网孔的公有电阻，即**$R_{12}=-R_2$，**这里出现"－"是由于网孔电流**I_{l1}**和**I_{l2}**方向相反。如果**I_{l1}**和**I_{l2}**同方向流过互电阻取"＋"。**

对于 m 个网孔的电路，可得网孔方程的一般形式。

$$\begin{cases} R_{11}I_{l1}+R_{12}I_{l2}+\cdots+R_{1m}I_{m}=U_{s11} \\ R_{21}I_{l1}+R_{22}I_{l2}+\cdots+R_{2m}I_{2m}=U_{s22} \\ \cdots\ \cdots\ \ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ R_{m1}I_{l1}+R_{m2}I_{l2}+\cdots+R_{mm}I_{2m}=U_{smm} \end{cases}$$

如何确定各系数呢？各系数有何规律呢？

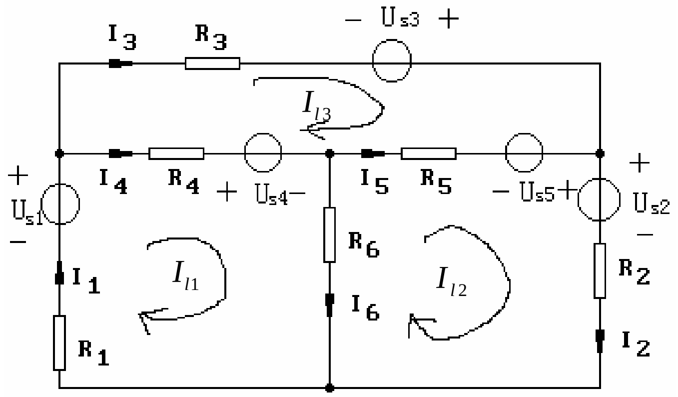
1) R_{11}、R_{22}、…、R_{mm}——**网孔** 1、2、…、m **的自电阻**(“＋”)；

2) R_{12}、R_{21}——**网孔** 1、2 **的公有电阻，为互电阻。仅当** I_{l1} **和** I_{l2} **在此电阻同方向时取“＋”，反之取“－”，无受控源时，** $R_{12}=R_{21}$，$R_{2m}=R_{m2}$ **等等；**

3) U_{s11}、U_{s22}、…、U_{smm}——**网孔** 1、2、…、m **沿** I_{l1}、I_{l2}、…I_{lm} **方向的电压源的电位升的代数和。**

下面通过例子来具体说明网孔分析法的具体步骤，讲解如何直接利用“自电阻”、“互电阻”“电压源的电位升代数和”来列方程。

例：图示电路，已知 $U_{s1}=21V$，$U_{s2}=14V$，$U_{s3}=6V$，$U_{s4}=2V$，$U_{s5}=2V$，$R_1=3\Omega$，$R_2=2\Omega$，$R_3=3\Omega$，$R_4=6\Omega$，$R_5=2\Omega$，$R_6=1\Omega$。**求各支路电流。**



解：由概念直接列网孔方程：

I_{l1}：$(R_1+R_4+R_6)I_{l1}-R_6I_{l2}-R_4I_{l3}=U_{s1}-U_{s4}$

I_{l2}：$-R_6I_{l1}+(R_2+R_5+R_6)I_{l2}-R_5I_{l3}=U_{s5}-U_{s2}$

I_{l3}：$-R_4I_{l1}-R_5I_{l2}+(R_3+R_4+R_5)I_{l3}=U_{s3}-U_{s5}+U_{s4}$

代入数据： $\begin{cases} 10I_{l1}-I_{l2}-6I_{l3}=19 \\ -I_{l1}+5I_{l2}-2I_{l3}=-12 \\ -6I_{l1}-2I_{l2}+11I_{l3}=6 \end{cases}$

解得 $I_{l1}=3A$ $\quad I_{l2}=-1A$ $\quad I_{l3}=2A$

由已知网孔电流求取各支路电流

$I_1=I_{l1}=3A$ $\quad I_2=I_{l2}=-1A$ $\quad I_3=I_{l3}=2A$

$I_4=I_{l1}-I_{l3}=1A$ $\quad I_5=I_{l2}-I_{l3}=-3A$ $\quad I_6=I_{l1}-I_{l2}=4A$

3．电路中含受控源的处理

处理方法实际上相同，把受控源当作独立源来处理，并追加确定受控源的方程。

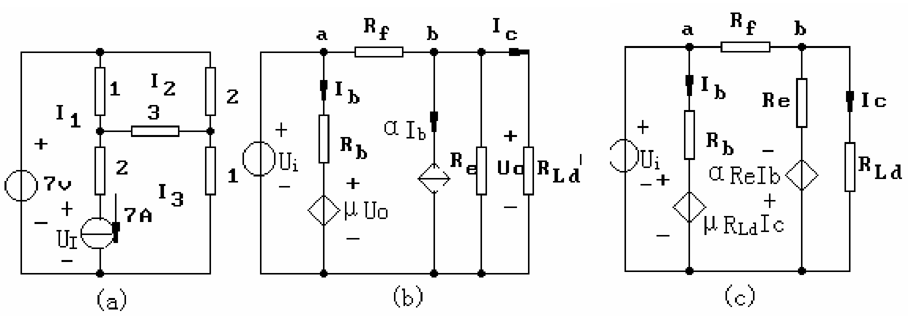
例：P. 51　**例** 3－5

4．含电流源I_s的处理

1) **如果电路中含有电流源和电阻的并联组合，则把它们等效变换为电压源和电阻串联组合，然后再列方程。即**I_s“**有伴**”$\rightarrow U_s$“**有伴**”$\rightarrow$**基本步骤。**

2) I_s“**无伴**”**增设电流源的电压**U_I**为方程变量，列写**KVL**方程时，路过**I_s**就以**U_I**代入，最后增补与**I_s**有关网孔电流的关系式。**

例：列出图示电路(a)**的网孔方程。**



解：增设U_I**，设网孔电流**I_1、I_2、I_3**，沿顺时针方向。**

$$\begin{cases}3I_1-I_2-2I_3=7-U_I\\-I_1+6I_2-3I_3=0\\-2I_1-3I_2+6I_3=U_I\\I_1-I_3=7\end{cases}$$

例：上图(b)**为晶体管低频小信号放大的电路模型。已知电路参数为：** $R_b=1K\Omega$，$R_e=50K\Omega$，$R_f=200K\Omega$，$R_{Ld}=10K\Omega$，　$m=2\times10^{-4}$，á=50。**设输入信号电压**U_i＝10mv，**求输出电压**U_o

解：本题说明用网孔电流法分析计算含受控源电路的一般步骤。电路中有两个受控源，μU_o**是** $VCVS$，**可将其等效转换为** $CCVS$，**即：**
$mU_o=m(R_{Ld}I_c)=mR_{Ld}I_c$

aI_b**是** $CCCS$，**可将它连同并联电阻**R_c**转换为**$aR_e\ I_b$**串联电阻**R_e，**成为** $CCVS$，**如图**(c)**所示，设网孔电流**I_1、I_2、I_3，**沿顺时针方向，列网孔电流方程，并注意到**I_b＝I_1－I_2，I_c＝I_3。**该电路的网孔方程为：**

回路 1：$R_bI_1-R_bI_2=U_i-mR_{Ld}I_3$

回路 2：$-R_bI_1+(R_b+R_f+R_c)I_2-R_eI_3=mR_{Ld}I_3+aR_e(I_1-I_2)$

回路3：$-R_e I_2 + (R_e + R_{Ld}) I_3 = -\alpha R_e (I_1 - I_2)$

将元件量值代入并整理，得

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + 2\times10^{-3} I_3 = 10\times10^{-3} \\ -2501 I_1 + 2751 I_2 - 50.002 I_3 = 0 \\ 2500 I_1 - 2550 I_2 + 60 I_3 = 0 \end{cases}$$

解得：$I_3 = -0.4347 \ mA$

$\therefore U_o = R_{Ld} I_3 = -4.347 \ \text{V}$

二、回路分析法(自学)

作业：P. 62　　3－2；　3－3；　3－4

§3－4　结点分析法

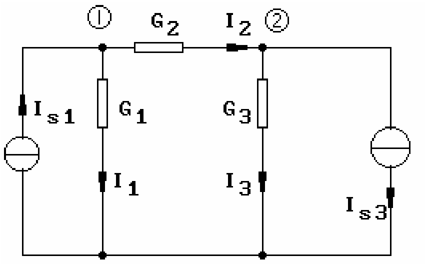
一、结点电压

先说明结点电压是一组独立电压变量。

结点电压——电路结点与参考结点(零电位)之间的电压，数目(n－1)**个。**

支路电压＝两结点电压之差

如图(a)



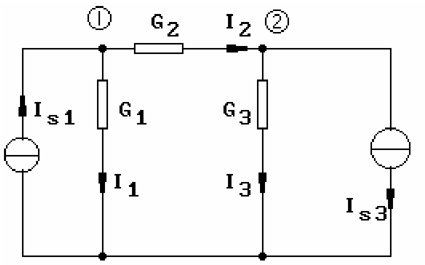
(a)

n＝3，**需要假设的结点电压数** n－1＝2。$U_{G1}=U_1$，$U_{G2}=U_1-U_2$，$U_{G3}=U_2$

∴　$I_1=G_1U_1$　　$I_2=G_2(U_1-U_2)$　　$I_3=G_3U_2$

二、结点方程的规律与列写步骤

如图(a)，**由** KCL **得：独立结点数** n－1



(a)

n_1：$G_1U_1+G_2(U_1-U_2)=I_{s1}$

n_2：$-G_2(U_1-U_2)+G_3U_2=-I_{s3}$

$$\longrightarrow\quad \begin{cases}(G_1+G_2)U_1-G_2U_2=I_{s1}\\ -G_2U_1+(G_2+G_3)U_2=-I_{s3}\end{cases}\quad\longrightarrow\quad \begin{cases}G_{11}U_1+G_{12}U_2=I_{s11}\\ G_{21}U_1+G_{22}U_2=I_{s22}\end{cases}$$

这里：1) G_{11}——n_1 **关联的所有电导之和，自电导**≥0

2) G_{12}、G_{21}——n_1、n_2 **共有电导之和的负值，互电导**≤0

3) I_{s11}——**注入结点** n_1 **的电流源代数和(流入为“＋”，流出为“－”)。如果电路中存在有伴电压源，先转为有伴电流源。**

对于 n 个结点(独立)一般形式

$$\begin{cases} G_{11}U_1+G_{12}U_2+\cdots+G_{1n}U_n=I_{s11} \\ G_{21}U_1+G_{22}U_2+\cdots G_{2n}U_n=I_{s22} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ G_{n1}U_1+G_{n2}U_2+\cdots+G_{nn}U_n=I_{snn} \end{cases}$$

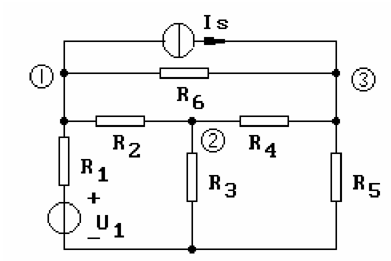
列写步骤：

1) **指定参考结点(零电位点)，标出结点号(选取变量)**；

2) **直接按“自电导”、“互电导”、注入某结点“电流源代数和”的概念列写结点方程(有伴电压源⇒有伴电流源)**；

3) **求解结点电压，再求取其它量**。

例：列出图示(b)电路结点方程。



(b)

解：

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_6}\right)U_{n1}-\frac{1}{R_2}U_{n2}-\frac{1}{R_6}U_{n3}=\frac{U_1}{R_1}-I_s \\ -\frac{1}{R_2}U_{n1}+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)U_{n2}-\frac{1}{R_4}U_{n3}=0 \\ -\frac{1}{R_6}U_{n1}-\frac{1}{R_4}U_{n2}+\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}\right)U_{n3}=I_s \end{cases}$$

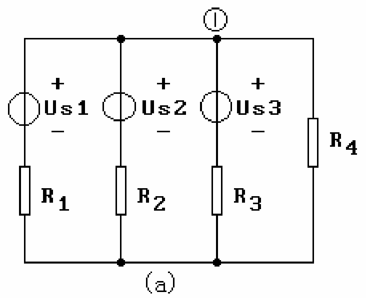
※ **结点分析法的讨论**

1) **特例**：$n=2$，$(n-1=1)$**时：弥尔曼定理，只含一个结点电压方程**。

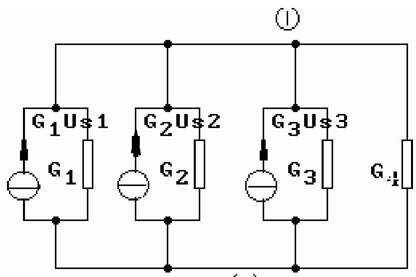
对图 b，结点方程为：

$$(G_1+G_2+G_3+G_4)U_{n1}=G_1U_{s1}+G_2U_{s2}+G_3U_{s3}$$

有 $U_{n1}=\dfrac{\sum(GU_s)}{\sum G}$



(a)



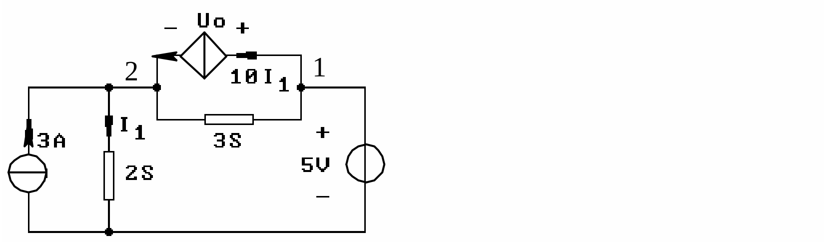
(b)

例：P. 69　3－12(考虑 K 闭合时)

2) 含独立无伴电压源

法 1：尽量以无伴电压源的某一极作为参考点，则另一极电位已知，不必列该结点方程。

例：P. 63　3－12 列出图示电路的结点电压方程



(a)

解：$U_{n1}=5\text{V}$

$-3U_{n1}+(2+3)U_{n2}=3+10I_1$

$I_1=2U_{n2}$

法 2：当无伴电压源多于 1 个且无公共端时，要将多余的(或全部)无伴电压源的电流作为变量，相应地再补充无伴电压源与其两端结点电压的关系式

例：P. 58　例 3－11 图(b)　(比较参考点的选择)

3) 含受控源

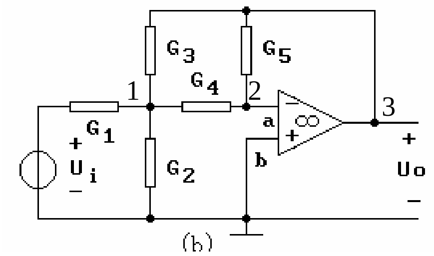
把受控源作为独立源看待，再处理控制变量。

例：P. 59　例 3－13

4) 利用结点电压法求解运算放大电路

对电路中的结点进行分析，列出结点方程。由于运放输出端的电流无法确定，故不能对输出端结点列方程，这一方程可由虚短方程 $U_a=U_b$ 弥补。

例：用结点法求图示电路的 $\dfrac{U_o}{U_i}$(输出电压与输入电压之比)



(b)

解：用结点法列写结点方程，用“虚短”规则

结点①：$(G_1+G_2+G_3+G_4)U_{n1}-G_3U_o-G_4U_{n2}=G_1U_i$

结点②：$-G_4U_{n1}+(G_4+G_5)U_{n2}-G_5U_o=0$

由“虚短”　$U_a=U_b$　得　$U_a=U_{n2}=0$

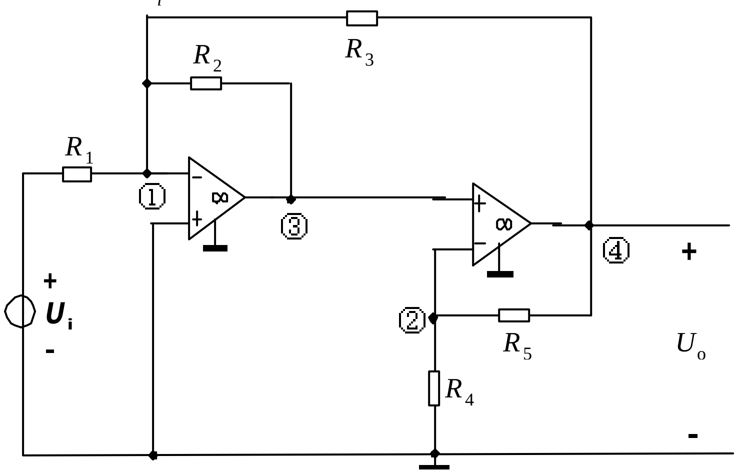
∴　**上方程变为：**

$$\begin{cases}(G_1+G_2+G_3+G_4)U_{n1}-G_3U_o=G_1U_i\\ -G_4U_{n1}-G_5U_o=0\end{cases}$$

则： $\dfrac{U_o}{U_i}=\dfrac{-G_1G_4}{(G_1+G_2+G_3+G_4)G_5+G_3G_4}$

不能对输出点列结点方程！

例：求图示电路 $\dfrac{U_o}{U_i}$



解： ① $\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}\right)U_{n1}-\dfrac{1}{R_2}U_{n3}-\dfrac{1}{R_3}U_o=\dfrac{1}{R_1}U_i$

② $\left(\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_5}\right)U_{n2}-\dfrac{1}{R_5}U_o=0$

由“虚短路”规则： $U_{n3}=U_{n2}$，$U_{n1}=0$

∴ $-\dfrac{1}{R_2}U_{n2}-\dfrac{1}{R_3}U_o=\dfrac{1}{R_1}U_i$　　**消去** U_o

$\left(\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_5}\right)U_{n2}-\dfrac{1}{R_5}U_o=0$

$$\frac{U_o}{U_i}=\frac{R_2R_3(R_4+R_5)}{R_1(R_3R_4+R_2R_4+R_2R_5)}$$

练习： P. 57　**例** 3－10

作业： P. 63　3－6；3－8；3－9；3－10；3－16

§3—5　电路的对偶性

在以上的研究中，我们可以发现，电路中的许多变量、元件、结构及定律都是成对出现，并且存在相类似的一一对应特性。这种特性就称为电路的对偶性。譬如对电阻元件，其元件约束关系是欧姆定律，即“$U=RI$ 或 $I=GU$”。如果将一个表达式中的 U 与 I 对换，R 与 G 对换，就得到另一个表达式。电路中结构约束是基尔霍夫定律，在平面电路中，对于每个结点可列一个 KCL 方程

$$\sum I_k=0$$

而对每个网孔可列一个 KVL 方程

$$\sum U_k=0$$

这里结点与网孔对应，KCL 与 KVL 对应，电压与电流对应。

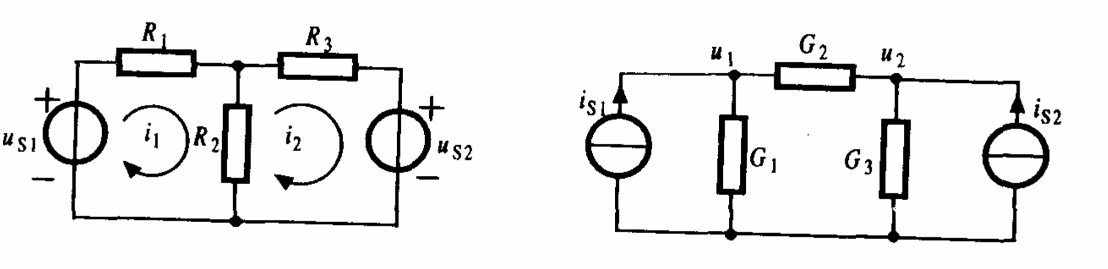
具有这样一一对应性质的一对元素(电路变量、元件参数、结构、定律等)，可称为对偶元素。电路中的一切公式和定理都是从电路的结构约束和元件约束推导出来的。既然这两种约束都具有对偶的特性，那么由它们推导出的关系显然也会有对偶特性。

从上述讨论中可知，如果电路中某一定理、公式或方程的表述是成立的，则将其中的元素用其相应对偶元素置换所得到的对偶表述也成立。

电路的对偶特性是电路的一个普遍性质，电路中存在大量对偶元素。以下是一些常用的互为对偶的元素：

电压	电流
磁链	电荷
电阻	电导
电感	电容
电压源	电流源
开路	短路
$CCVS$	$VCCS$
$VCVS$	$CCCS$
串联	并联
网孔	结点
回路	割集
树支	连支
KVL	KCL

例如：



(*a*) (*b*)

对于上图中的电路，图(a)**的网孔方程**(**网孔电流均为顺时方向**)**和图**(b)**的结点方程分别为：**

$$\begin{cases}(R_1+R_2)i_1-R_2i_2 & =u_{S1}\\ -R_2i_1 \quad (R_2+R_3)i_2 & =-u_{S2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}(G_1+G_2)u_1-G_2u_2 & =i_{S1}\\ -G_2u_1 \quad +(G_2+G_3)u_2 & =-i_{S2}\end{cases}$$

比较这两组方程，可看出，它们的形式相同，对应变量为对偶元素，所以通常把这两组方程称为对偶方程组。电路中把像这样一个电路的结点方程与另一个电路的网孔方程对偶的两电路称为对偶电路。显然，上图中(a)**和**(b)**两电路是对偶电路。**