

第二章

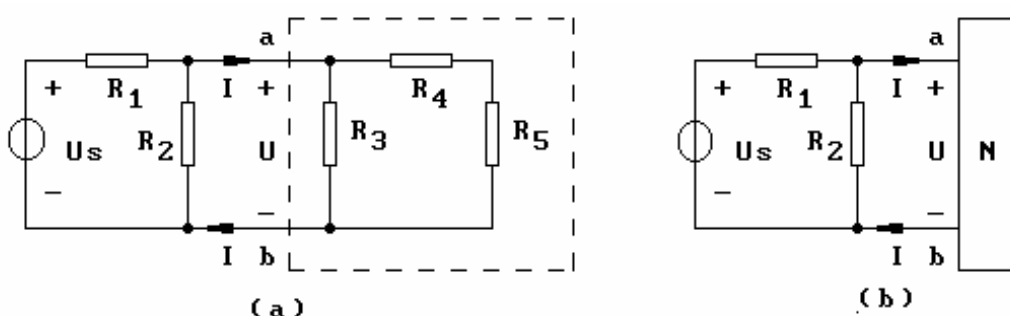
电路的等效变换

§2-1 等效二端网络的定义 电阻串并联电路

一、等效二端网络的定义

1. 二端网络的定义

在电路分析中,可以把互连的一组元件看作为一个整体,如图(a)所示(R_3 、 R_4 、 R_5 这一部分电路)。当这个整体只有两个端钮与外部电路相连接,则不管它的内部结构如何,我们统称它为二端网络或单口网络,可以用图(b)中的 N 来表示。



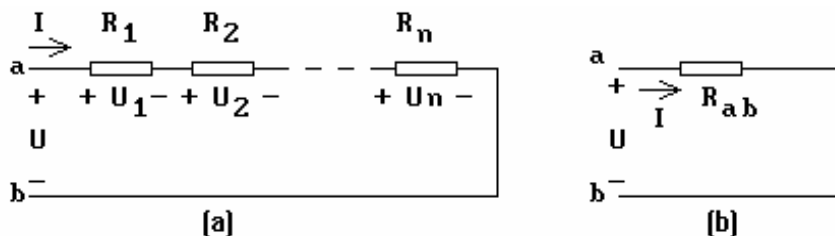
特点:二端网络中,从一个端钮流进的电流必定等于另一端钮流出的电流,该电流 I 称为端口电流, U 为端口电压。

2. 等效

二端网络 N_1 的(VAR)与另一个二端网络 N_2 的(VAR)完全相同,则称 N_1 、 N_2 完全等效。这里的等效是指对任意的**外电路**等效,对内部不等效。

目的:引入等效概念,可大大简化二端网络,以利分析。

二、电阻的串联电路(流过同一电流)及分压公式



在电路中,把几个电阻元件依次一个一个首尾连接起来,中间没有分支,在电源的作用下流过各电阻的是同一电流。这种连接方式叫做电阻的串联。

图示电路表示几个电阻串联后由一个直流电源供电的电路。 U 代表总电压, I 为电流。

N_1 和 N_2 两个二端网络, 运用等效概念, N_1 可等效为 N_2 (一个电阻 R_{ab})

由 KVL $U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$

由 VAR $U = R_1 I_1 + R_2 I_2 + \dots + R_n I_n = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) I$

对 N_2 : VAR $U = R_{ab} I$ 这里称 R_{ab} 为等效电阻。

∴ 串联(n 个电阻)等效电阻 $R_{ab} = \sum_{k=1}^n R_k$, 等效电阻如图 b

等效电阻必大于任一串联电阻, 即: $R_{ab} > R_k$

而第 k 个电阻上的电压为:

$$U_k = \frac{R_k}{\sum_{k=1}^n R_k} U \quad (\text{分压公式})$$

下面再看 $P = UI = R_1 I^2 + R_2 I^2 + \dots + R_n I^2 = R_{ab} I^2$

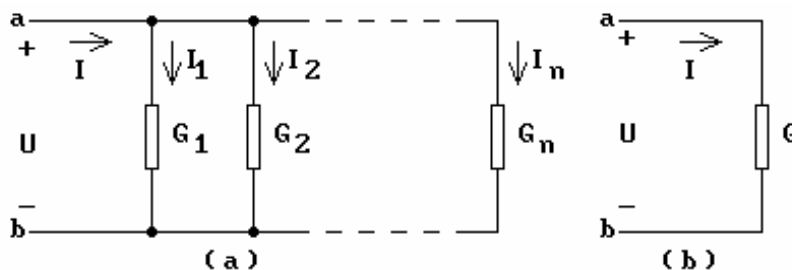
此式表示 n 个串联电阻吸收的总功率等于它们的等效电阻所吸收的功率。

电阻串联时, 各电阻上的电压为: $U_k = R_k I = \frac{R_k}{R_{ab}} U$, 此式称分压公式。

例: P. 23 例 2-1

三、电阻的并联(加的是同一电压)(及分流公式)

图示为 n 个电阻并联。电阻并联时, 各电阻上的电压相同。



设 a 、 b 两端电压为 U , 总电流 I , G_1, G_2, \dots, G_n 为各电阻的电导, I_1, I_2, \dots, I_n 为流过各电阻的电流。

由 KCL $I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_n} = (G_1 + G_2 + \dots + G_n)U = GU$

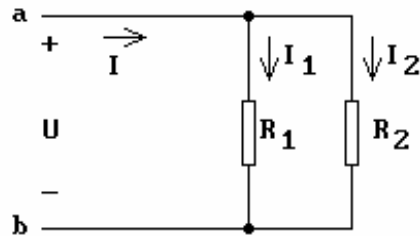
$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_n = \sum_{k=1}^n G_k \quad \text{或} \quad \frac{1}{R} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

G 称为并联电阻的等效电导, 等效电路如图(b)。

再由: $P = UI = (G_1 + G_2 + \dots + G_n)U^2 = GU^2 = P_{\text{总}}$, 得到: n 个并联电阻吸收的总功率等于它们等效电阻所吸收的功率。

电阻并联时，各电阻中的电流为： $I_k = G_k U = \frac{G_k}{G} I$ ——称为分流公式。可见：各个并联电阻中的电流与它们各自的电导值成正比。

如图，两个电阻并联时，其等效电阻 R 可计算如下：



$$\frac{1}{R_{ab}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{ab} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1 // R_2$$

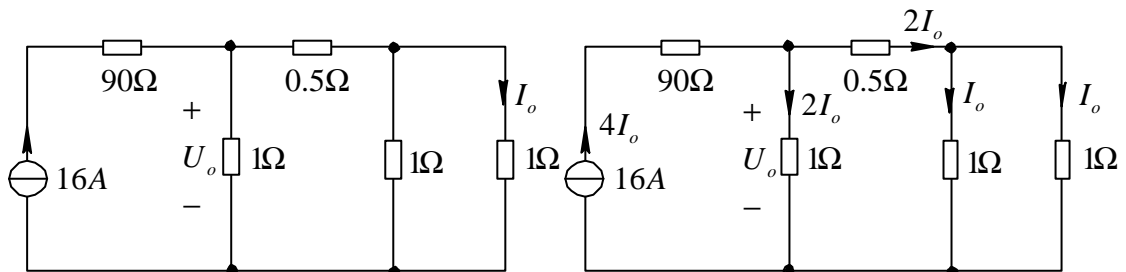
此时分流公式为： $I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$ $I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$

我们看 $R_{ab} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ 有两个特例：

1) $R_1 = R_2$ 时 则 $R_{ab} = \frac{R_1}{2}$

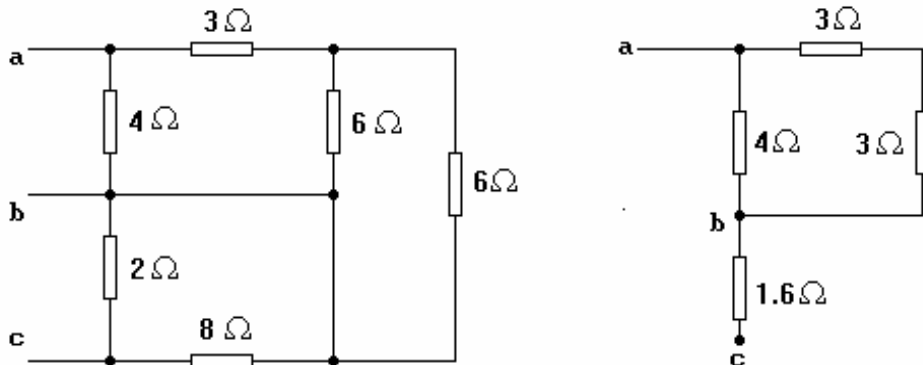
2) $R_1 \ll R_2$ 时， $R_{ab} = R_1$

例：求图示电路中的 I_o 及 U_o 。



四、电阻的串并联(混联)

如图所示电路中，既有电阻串联，又有电阻并联，这种连接方式叫电阻的串并联(混联)，这种电路称为简单电路，可利用一、二结论逐步化简。



例 求图示电路 R_{ab} 、 R_{ac}

解： 1) 求 R_{ab}

$\because 2\Omega$ 、 8Ω 被短路

$$\therefore R_{ab} = 4 // [3 + (6 // 6)] = 4 // (3 + \frac{6}{2}) = 4 // 6 = 2.4\Omega$$

2) 求 R_{ac}

原电路可改画为：

$$\therefore R_{ac} = [4 // (3 + 3)] + 1.6 = 2.4 + 1.6 = 4\Omega$$

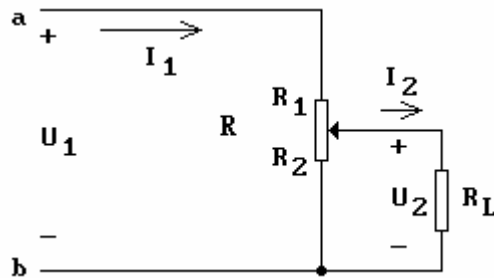
在串并联电路中，对于给定的端钮，若已知电压 U (或电流 I)，欲求各电阻上的电压和电流，其求解步骤一般是：

- 1) 首先求出串并联电路对于给定端钮的等效电阻 R 或电导 G ；
- 2) 应用欧姆定律求出电流 (或电压)；
- 3) 应用电流分流、电压分压公式求出每个电阻上的电流和电压。

例：图示电路，已知 $U_1 = 220V$ ， $R_L = 50\Omega$ ， $R = 100\Omega$

1) 当 $R_2 = 50\Omega$ 时， $U_2 = ?$ 分压器的输入功率、输出功率及分压器本身消耗的功率为多少？

2) 当 $R_2 = 75\Omega$ 时，输出电压是多少？



解： 1) 当 $R_2 = 50\Omega$ 时， a 、 b 的等效电阻 R_{ab} 为 R_2 和 R_L 并联后与 R_1 串联而成，所以

$$R_{ab} = R_1 + \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} = (50 + \frac{50 \times 50}{50 + 50}) = 75\Omega$$

滑线变阻器 R_1 段流过的电流

$$I_1 = \frac{U_1}{R_{ab}} = \frac{220}{75} = 2.93A$$

负载电阻流过的电流可由分流公式得：

$$I_2 = \frac{R_2}{R_2 + R_L} \times I_1 = \frac{50}{50 + 50} \times 2.93 = 1.47A$$

$$U_2 = R_L I_2 = 50 \times 1.47 = 73.5V$$

分压器的输入功率为： $P_1 = U_1 I_1 = 220 \times 2.93 = 644.6W$

分压器的输出功率为： $P_2 = U_2 I_2 = 73.5 \times 1.47 = 108W$

分压器本身消耗的功率为：

$$P = R_1 I_1^2 + R_2 (I_1 - I_2)^2 = 50 \times 2.93^2 + 50 \times (2.93 - 1.47)^2 = 535.8W$$

2) 当 $R_2 = 75\Omega$ 时,

$$R_{ab} = (25 + \frac{75 \times 50}{75 + 50}) = 55\Omega$$

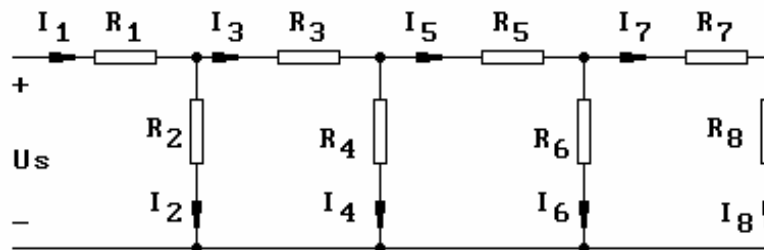
$$I_1 = \frac{220}{55} = 4A$$

$$I_2 = \frac{75}{75 + 50} \times 4 = 2.4A \quad (\text{分流公式})$$

$$U_2 = 50 \times 2.4 = 120V$$

五、梯形电路(P. 28, 自学)

具有下图所示结构形式的电路称为梯形电路, 本质为混联。(注意分析该类电路的方法, 线性处理)



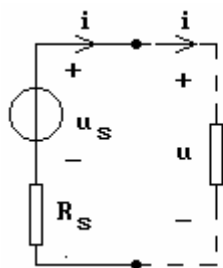
练习: 老版 P. 44 2-4

作业: P. 41 2-1(a)(c); 2-2

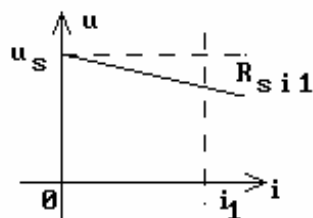
§2-2 实际电源的两种模型及其等效变换

一、由电压源构成的实际电源模型

一般情况下，实际电压源的端电压常随输出电流而变，实际电压源在一定范围内可用电压源 U_s 串联电阻 R_s 作为模型：(如干电池)



∴ 外特性为：



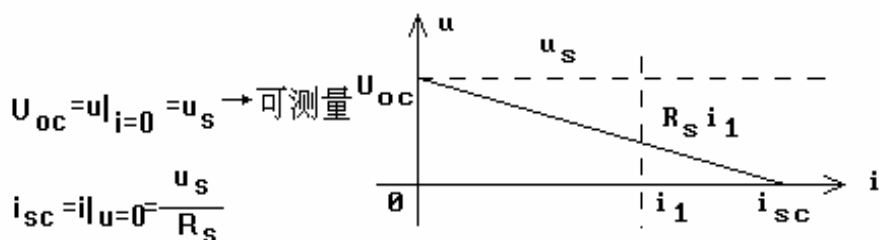
对此图，由欧姆定律及 KVL 可写出如右方程： $U = U_s - R_s I$

当实际电源不接负载时，它处于开路状态，这时因 $I=0$ ，所以它的端口电压等于定值电压 U_s ，这时的端电压称为开路电压，用 U_{oc} 表示， $U_{oc} = U_s$ 。式中： U_s 为电源的开路电压； R_s 为电源内阻，又叫电源的输出电阻。

如果负载短路，实际电源处于短路状态，这时短路电流 $I_{sc} = \frac{U_{oc}}{R_s}$ ，而端电压 $U=0$ 。由于实际电源内阻一般都很小，所以短路电流很大，以致会损坏电源，这是不允许的。

★ 实际电源的开路电压和短路电流的测量：

实际电源的开路电压很容易测出，如果允许将电压源短路，只要测出短路电流，就可以测定实际电源的内阻 $R_s = \frac{U_s}{I_{sc}}$ 。

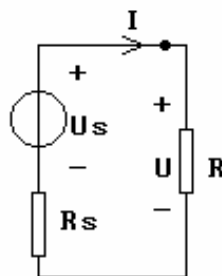


但对一般实际电压源是不允许短路的，那么有没有办法测出呢？如右下图：

方法是：接上适当 R ，测出 U 、 I

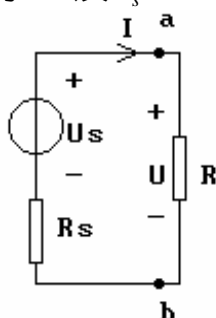
则：

$$R_s = \frac{U_s - U}{I} = \frac{U_{oc} - U}{I}$$



$$(I_{sc} = \frac{U_s}{R_s})$$

例：某直流电源的开路电压为 12V，与外电阻接通后，用电压表测得 $U=10V$ ， $I=5A$ ，求 R 及 R_s



解：

$$R = \frac{U}{I} = \frac{10}{5} = 2\Omega$$

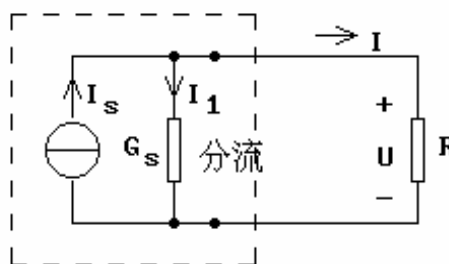
$$R_s = \frac{U_{oc} - U}{I} = \frac{12 - 10}{5} = 0.4\Omega$$

二、实际电流源模型 一般不得开路

理想电流源实际上是不存在的，总存在一定内阻，可以用理想电流源 I_s 和电导为 G_s 的电阻相并联来构成实际电源的模型。

$$\text{有 } I = I_s - G_s U$$

可见，实际电源的输出电流 I 小于定值电流 I_s ，端电压越大内导分流就越大，输出电流就越小。



由欧姆定律、KCL: $I = I_s - G_s U$ (VAR 曲线见 P. 32 图 2-14)

I_s 为电源短路电流， G_s 为电源内电导：

$$G_s = \frac{I_s}{U_{oc}}$$

实际电流源的 G_s (内阻 R_s 越大) 越小，内部分流越小，就越接近于理想电流源。

例：上图中， $I_s = 4A$ ， $G_s = \frac{1}{8}S$ ，当外接电阻 $R = 8\Omega$ ，求： I ， U 。

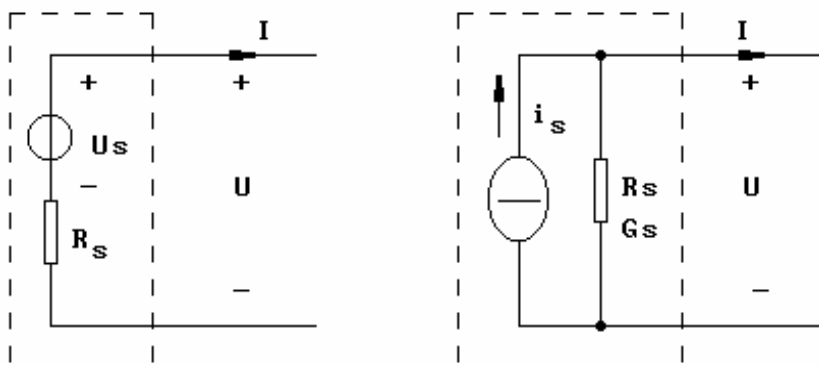
$$\text{解：} \quad I = I_s - G_s U = \frac{U}{R} \Rightarrow U = \frac{I_s}{G_s + \frac{1}{R}} = \frac{4}{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}} = 16V$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{16}{8} = 2A$$

三、实际电源两种模型的等效互换

在电路分析中，由等效电路(如果两个电路对外电路的影响一致，则这两个电路等效)的概念，电源的两种模型可等效互换，因为我们关心的是电源对外电路的影响而不是电源内部的情况。

根据等效定义，两种模型等效则它们的 VAR 完全相同，则有：



$$U_s = R_s I_s \text{ 或 } I_s = U_s / R_s, \text{ 应注意:}$$

1. 互换时要注意电压源电压极性与电流源电流方向关系
2. 两种模型中 R_s 相等，但联接方式不同

讨论：

- 1) 当 $R_s \rightarrow 0$ 理想电压源
- 当 $G_s \rightarrow 0$ 理想电流源

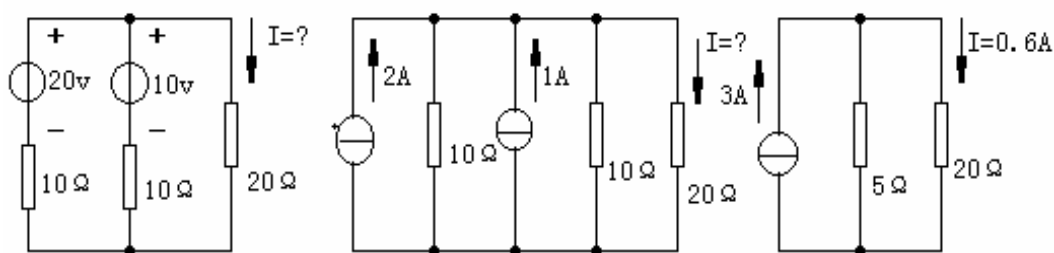
彼此间是不能互换的，故电压源和电流源叫做独立源，有时简称电源。

2) 这种等效仅对端口外部等效，对模型内部(虚线内部)不等效。

例：当 $I=0$ ， $P_{R_s} = 0$ (内部)，而 $P_{G_s} = \frac{I_s^2}{G_s} \neq 0$ (内部)。尽管 $R_s = \frac{1}{G_s}$ ，

但 $P_{R_s} \neq P_{G_s}$ 。然而对外部来说，它们吸收或发出的功率相等。在电路分析中对电源用哪一种模型呢？这要视具体情况而定：

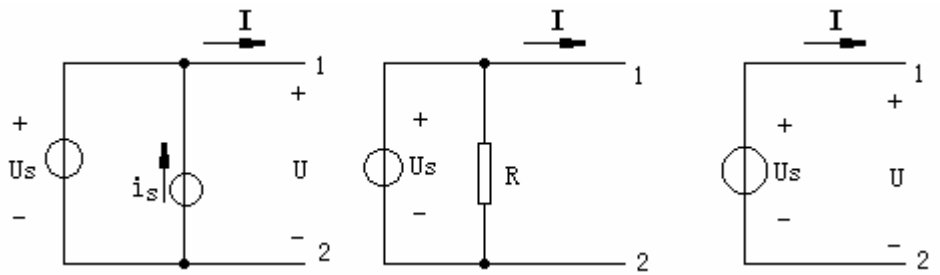
例：



★ 此处讲一下电压源串联、电流源并联。

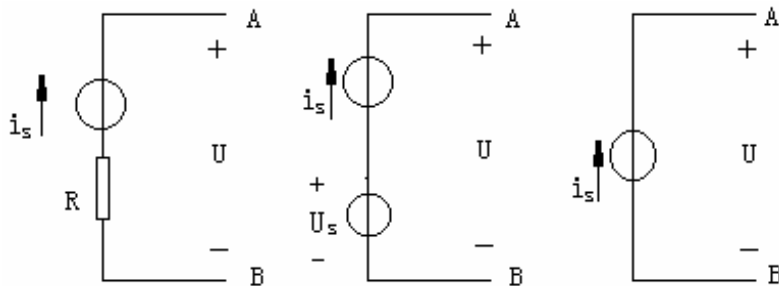
例：P. 42 2—4

三、电源与支路的串并联

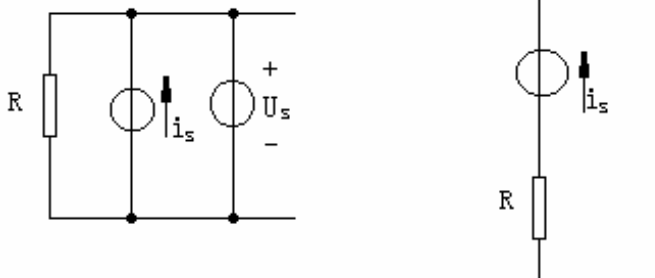


从外部性能等效的角度来看，任何一条支路，如图所示，电流源 I_s 或电阻 R 与 U_s 并联后，对外电路而言，总可用一个等效电压源替代，电压仍为 U_s 。

同理，任何一条支路与电流源 I_s 串联后，对外电路总可用一个等效电流源替代，等效电流源的电流仍为 I_s ，如下图：



思考题



练习：老版 P. 45 2-8(a)(b); 2-10

作业：P. 41 2-3; 2-4

§2-3 运用等效变换简化含受控源的电路

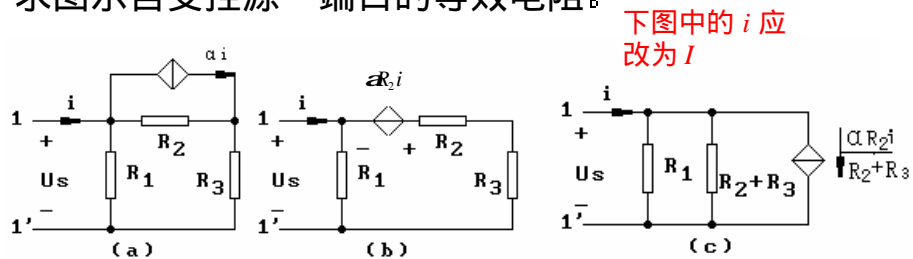
第一章中介绍了独立源和受控源，它们有不同之处，但在电路分析中，分析方法有相似之处。对受控源也可进行电压源模型与电流源模型的等效变换，下面通过例题来说明。

注意：在化简过程中，若受控源还在，则应保留控制量。

一、由受控源、电阻组成的二端网络简化

对于此类的二端网络，总能用一个**等效电阻**(或称为输入电阻)来等效。等效电阻该如何求呢？

例：求图示含受控源一端口的等效电阻。



解：这里不能简单地用串并联来处理，为求输入电阻 R_i ，我们可用欧姆定律 $R_i = \frac{U_{11'}}{I}$ 。为此，我们不妨先假设在 $1-1'$ 端施加一激励 U_s ，则必有一响应 端口电流 I

这样就可以求出输入电阻 $R_i = \frac{U_s}{I}$ 。(端口激励 响应法)，原电路由(a)→(b)→(c)等效变换。

$$\therefore \text{有} \quad I = \frac{U_s}{R_1} + \frac{U_s}{R_2 + R_3} + \frac{aR_2 I}{R_2 + R_3}$$

$$R_i = \frac{U_s}{I} = \frac{R_1 R_3 + (1-a)R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

对于上式分子中可能出现负值，故在一定条件下，含受控源的输入电阻 R_i 可能为零，甚至为负值。(P. 34 标注)

结论：对于一个不含独立源而只含受控源和电阻的二端网络，不论其内部结构如何复杂，它的端口电压和电流恒成正比，即 R_i 为一常数。

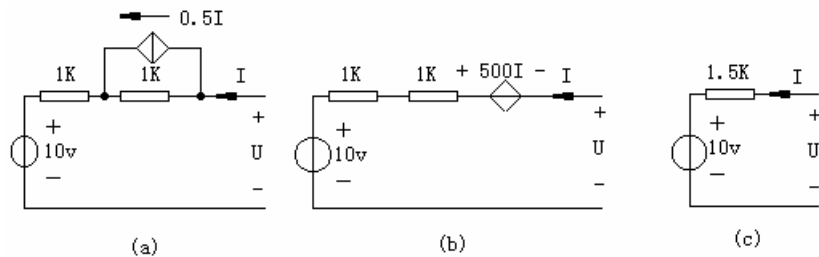
分析方法：端口激励 响应法。

上图中若 $a=0$ ，受控源开路，图(a)则是简单的串并联电路。

二、由独立源、受控源与电阻组成的二端网络简化

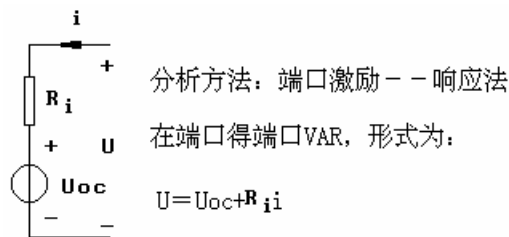
对于此类问题的简化，实际上也是寻求一个简单的等效电路。
分析方法：同样可采用激励 响应法，先来看下面的例子。

例：试简化图示的二端网络。



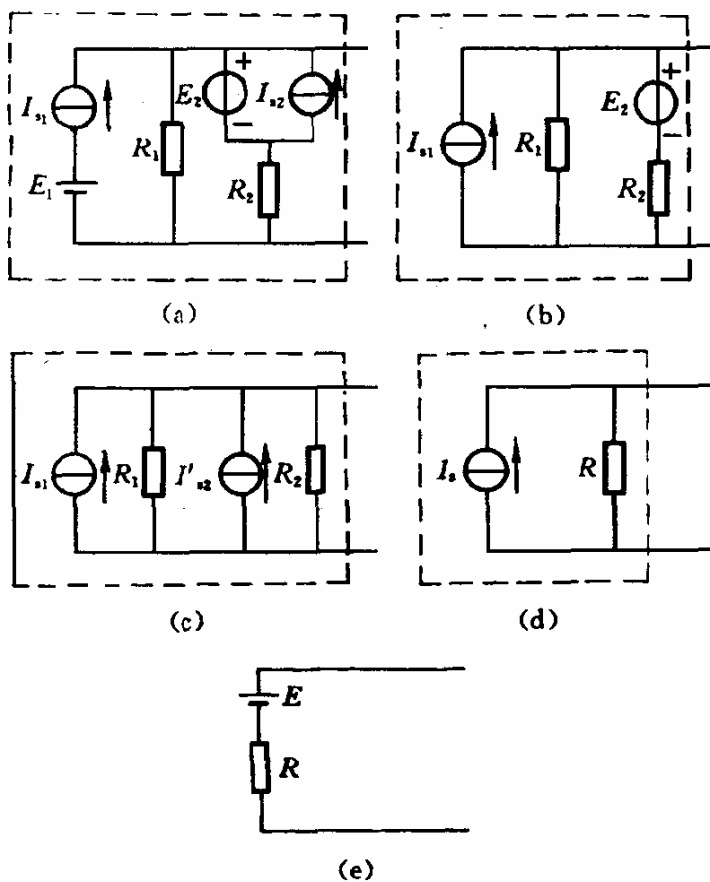
对图(b)，由 KVL 有 $U = 2000I - 500I + 10 = 10 + 1500I$ ，根据这个 VAR 表达式可以画出图(c)。

结论：一个由独立源、受控源与电阻组成的二端网络，总可用一个电压源与一个电阻串联来等效，(当然也可用电流源并联一个电阻表示)，即



注意：含受控源电路化简，等效变换时，不能把受控源的控制量消除掉。例如：P. 35 例 2-12 中， I_3 这条支路不能随意地化简掉，应保留 I_3 支路。(请同学自学)

例：图(a)中虚线框内所示的电路，已知电压源电动势 $E_1 = E_2 = 30V$ ，
 电流源电流 $I_{s1} = I_{s2} = 2A$ ，电阻 $R_1 = 3\Omega$ ， $R_2 = 6\Omega$ 。试将这虚线框内的
 电路简化为一个等效的电压源。



练习： P. 42 2-8

作业： P. 42 2-6; 2-7

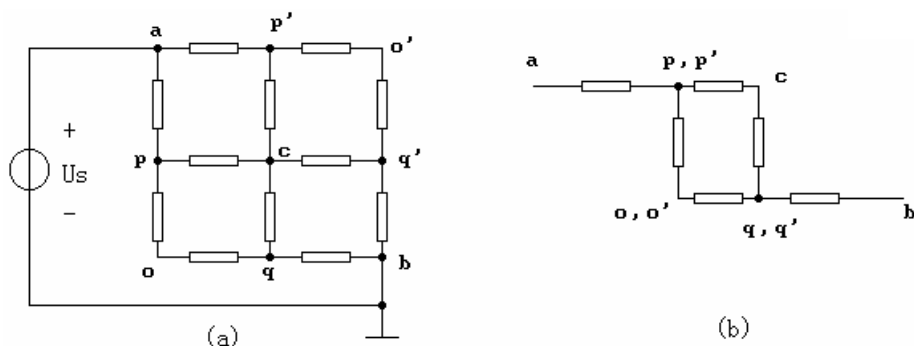
§2-4 非串、并联电路的简化

实际电路中，结构往往十分复杂，如 P. 36，图 2-23 所示惠斯顿电桥电路。对于这种既非串联又非并联的简化如何处理呢？原则上在特定条件下，通过局部电路的等效变换，转换为串、并联电路来求解，下面介绍两种方法：

一、具有一定对称性的电路

有些网络在电气结构上具有某种对称性质，正确地利用对称性，可大大简化分析。

例：图示电阻网络，各电阻相等均为 R ，求 ab 端口等效电阻 R_{ab} 。



解：假设 a 、 b 端口加一电压源 U_s ，由于电路以 acb 为轴左右对称，所以节点 p 与 p' ， q 与 q' ， o 与 o' 的电位分别相等，将等电位点联接起来就成了图(b)电路，相当于 acb 为轴将左右部分“对折”到左边，对应的电阻并联(各电阻均为 $\frac{R}{2}$)

$$\therefore R_{ab} = \frac{R}{2} + \frac{R \times R}{R + R} + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2} \quad \text{成为串并联电路}$$

对于图(a)还有另一种对称性，就是以 oco' 为中心的上下对称，设 b 点为零电位点， a 点电位为 U_s ，则在中心线各点的电位均为 $\frac{1}{2}U_s$ ，即 o ， c ， o' 三点等电位，也可联接起来，也方便求出

$$\therefore R_{ab} = \frac{R}{2} + \frac{R}{4} + \frac{R}{4} + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R$$

结论：在电路分析中，如果已知或判断出电路中某两点或多点电位(节点电位)相同，即可把这两个(多个)节点短接，来化简电路。

同理：如果已知或预先判断出电路中某一支路没有电流通过，可以把这一支路断开，即开路(请大家自学 P. 36 图 2-24)

例：P. 37 例 2-14

二、Y型和D型网络的等效变换

二者都是简单的三端网络, Y型网络和 Δ 型网络可以相互转换。(大家自学)

记住: $R_{\Delta} = 3R_Y$ 或 $R_Y = \frac{R_{\Delta}}{3}$ (对称情况)

练习: 老版 P. 44 2-2; 新版 P. 42 2-11

作业: P. 43 2-11; 2-13