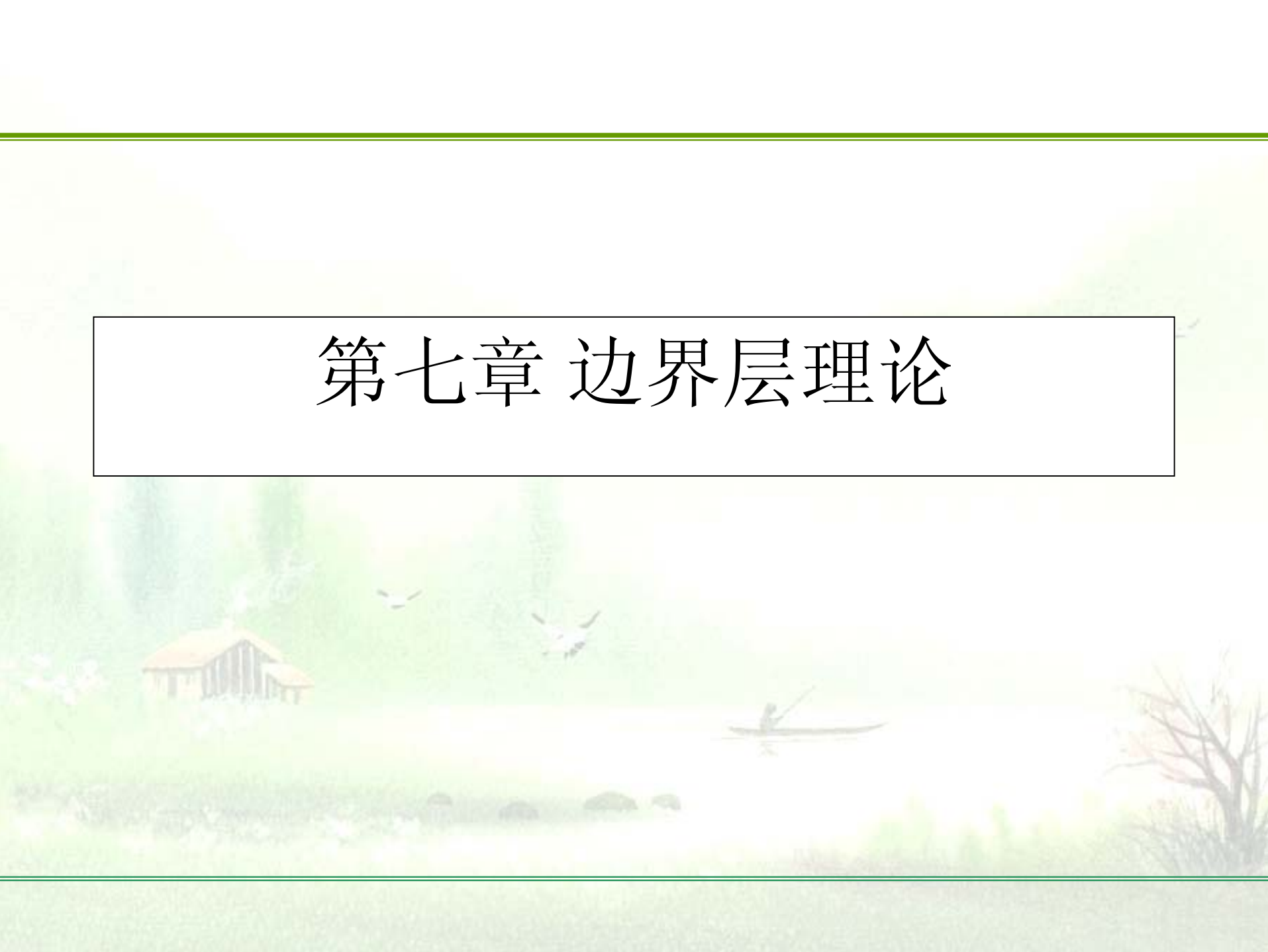
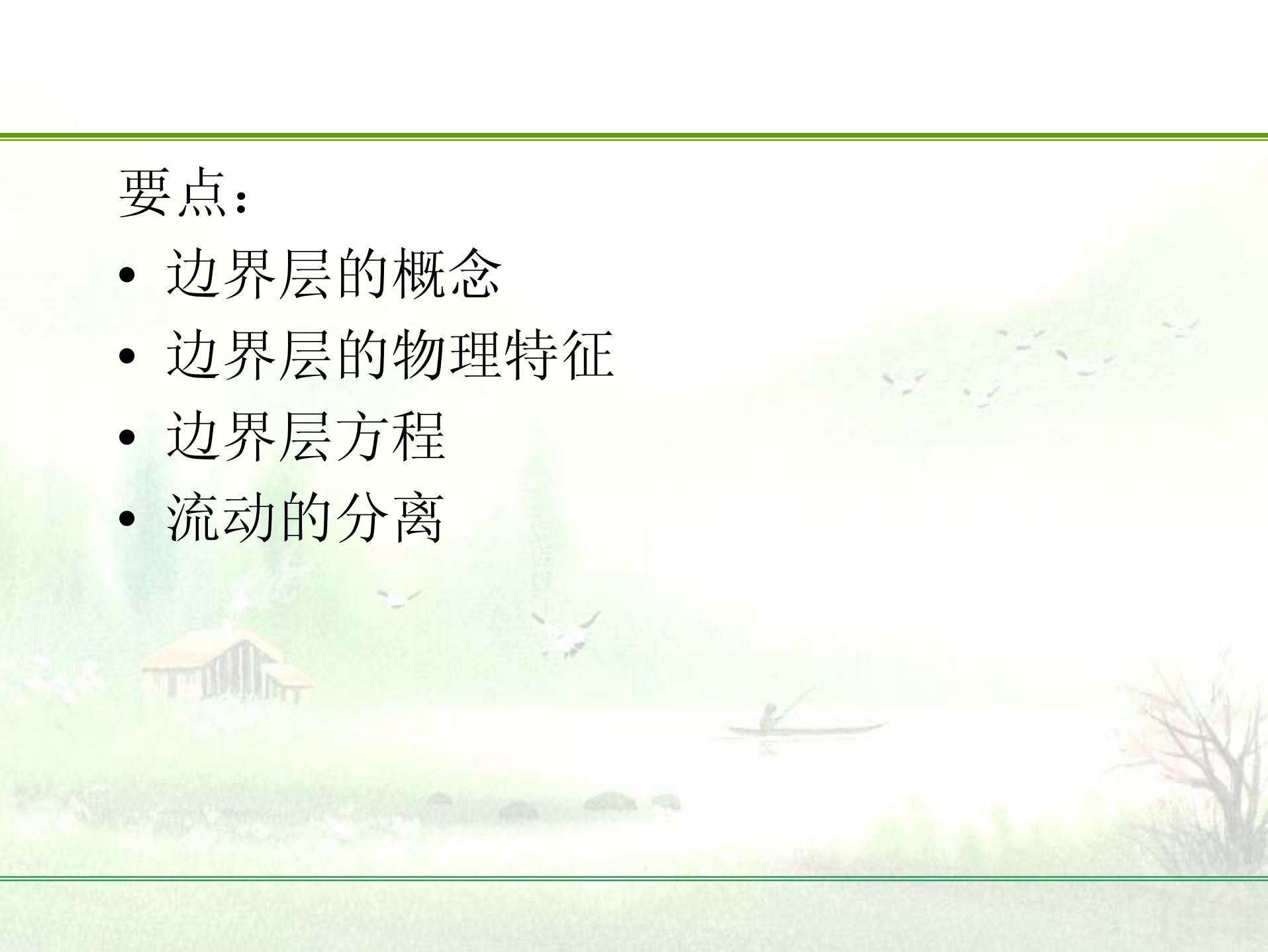


第七章 边界层理论



要点：

- 边界层的概念
- 边界层的物理特征
- 边界层方程
- 流动的分离



§ 7.1 边界层

[1]边界层概念

◎Reynolds数意义的回顾

Re数很大时，可以忽略粘性作用。但是由理想流体得出的速度场在靠近壁面处与真实情况不符。——D'Alembert佯谬。

◎无滑移边界条件

真实情况下，紧贴物体表面的流体与物体之间是没有相对流动的，这样在紧靠物体表面附近的一层流体区域中，有很大的速度梯度。

◎实际流体是有粘性的。

按照Newton内摩擦定律，当流场中流体之间存在速度梯度时，粘性就以内摩擦的形式出现。其特点是使低速流体加速，使高速流体减速。速度梯度越大，粘性力也就越大。

这样，在近靠壁面的层中，粘性力和惯性力相比是不能忽略的。



Prandtl在1904年提出了边界层的概念，他认为流动可以分两个区域来研究：在物体表面处有一个薄层，在这个薄层中必须考虑粘性力的作用，这个薄层称为**边界层**。在边界层外的区域中，流体可以当作理想的。

边界层概念的作用：将粘性力的作用限制在很薄的一层中，对于薄层外部的大部分流域，则可按理想流体的处理方法，极大地简化粘性流体分析，而且所得的结果与实际的情况也相符。

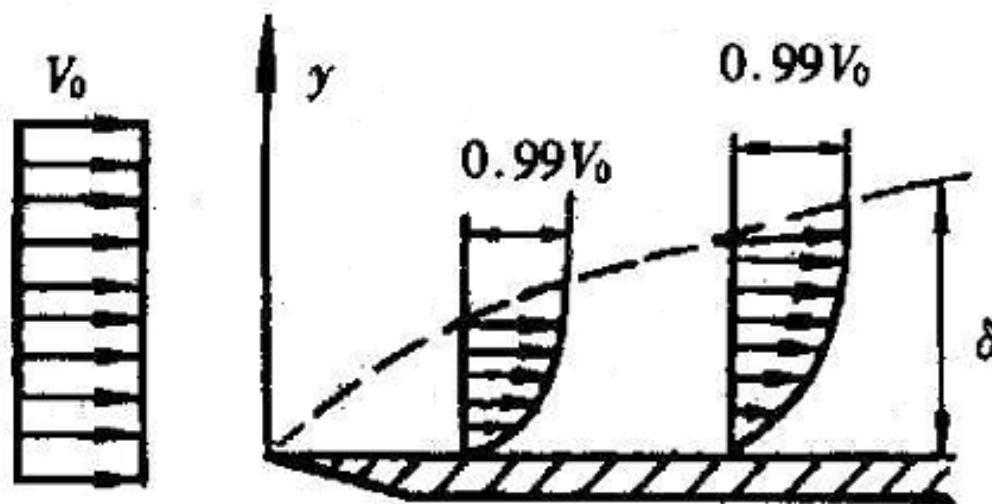
Prandtl的边界层理论对流体力学的发展起了极大的推动作用。

[2]边界层的基本概念与特征

◎边界层的形成

由于流道形状的不同，使得边界层中的流动参数发生变化，特别是压力的变化，而直接影响到边界层的形成和发展。

(1) 平板边界层



平板附面层的形成

→ 边界层厚度

将绕流流场划分成边界层和外流区两个部分，首先遇到的是如何确定两者之间的分界面。参看平板边界层的图。

由于粘性作用，流体速度在壁面处为零，然后沿壁面法向并逐渐增加，最终达到外部主流的速度 V_∞ 。考虑到边界层外边界处，速度增加到 V_∞ 是一个渐近过程，因此人为规定：将流体速度从 $u=0$ 到 $u=0.99 V_\infty$ 对应的流体层的厚度定义为 **边界层的厚度**。

特别需要指出的是，边界层的外边界不是流线。事实上，边界层内是有法向速度的。

→ 边界层形成

一块平板顺着来流方向放置，沿着流动方向向下，由于粘性而损耗了动能，使得边界层里的速度沿程减小，结果边界层的厚度沿程是不断增加的。

→ 边界层厚度——量级估计

边界层里，粘性力与惯性力同量级，即

$$\rho \frac{U^2}{L} \sim \mu \frac{U}{\delta^2} \quad \text{即} \quad \delta \sim \sqrt{\frac{\mu L}{\rho U}} = \frac{L}{\sqrt{Re}}$$

$$\text{即} \quad \frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

所以，当 Re 远大于1时， $\delta/L \ll 1$

圆管边界层

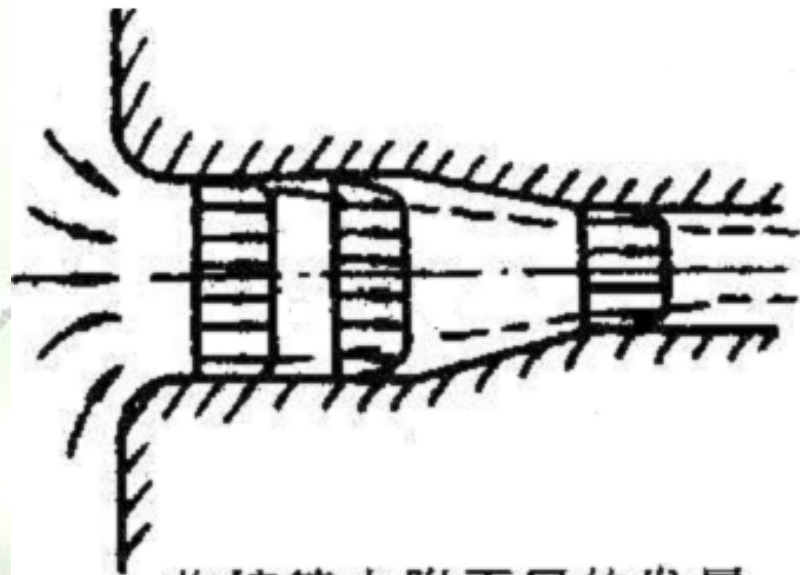
流体匀速进入光滑圆管，由于粘性作用而在管壁处形成边界层，边界层的存在使得靠近壁面的流体速度减小，但是流量却不变，结果管中心的流体速度加快。

随着流体往管内流，边界层的厚度逐渐加大，当圆管足够长时，边界层最终将扩展到中心线上，换言之，就是整个通道都被边界层所占据。此时整个管内的流动都必须按粘性流动处理。这就是所谓的充分发展的管流。而管道入口处的流动称为初始段。

收敛通道内的流动

在收敛通道内，由于主流流速不断加大，致使管内压力不断减小，后面我们将证明，在流动方向上主流压力分布就是边界层内的压力分布，因此，边界层里的压力向下游是减小的，这称为**顺压力梯度**。

在顺压梯度下，
边界层逐渐变薄。
——请分析原因。



收缩管中附面层的发展

扩张通道内的流动

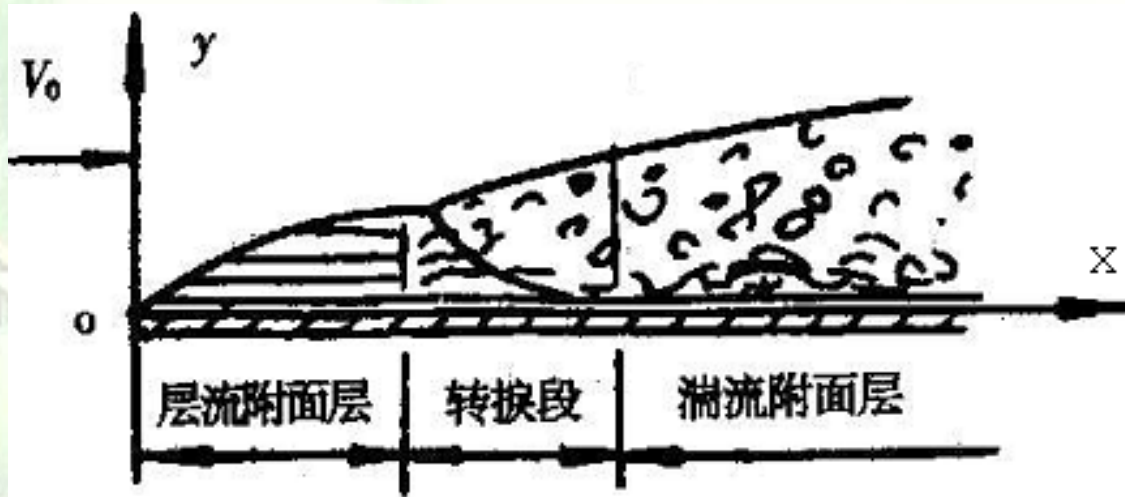
与顺压梯度相反，这里将出现**逆压梯度**。流体将不断消耗动能来平衡压力的增加。此时边界层将越来越厚，形象地说，边界层里的速度分布越来越瘦，最终流体动能将不能平衡压力，边界层里的速度减为零。结果边界层里将出现倒流的情况。这种现象称为分离。开始出现倒流的地方叫做分离点。



扩散管中的流动

[3] 层流边界层和湍流边界层

一般情况下，物体前缘或管道进口处前段将形成层流边界层。经过一段路程后，层流边界层将变为湍流边界层。这个转变一般不是突然的，有一个过渡段，称为转捩段。有时在工程中，为使问题简单常常假设转捩段的长度为零，称为转捩点。



平板附面层的发展

- 临界Re数。它取决于很多扰动因素影响。
- 判断流态的准则仍然是雷诺数。不过，有沿板长的雷诺数和当地雷诺数之分，分别是：

$$\text{Re} = \frac{\rho V_{\infty} L}{\mu}, \text{Re}_x = \frac{\rho V_{\infty} x}{\mu}$$

- 平板边界层的临界雷诺数 Re_x 约为 $3 \times 10^5 \sim 3 \times 10^6$ 。
- 层流边界层的流动阻力比湍流的大；但是一旦层流边界层分离，流动阻力就会大大增加，这时可以通过将边界层提前由层流变为湍流，使流动阻力减小。

[4]边界层的结构

一般不划分层流边界层。

湍流边界层可以按照壁面湍流、管内湍流和自由湍流。管内湍流前面已经做了介绍，现在讨论壁面湍流边界层。

边界层里面，靠近壁面的地方，首先是**粘性底层**。该层中，由于壁面的限制，靠近壁面处流体的脉动速度和湍流剪应力都趋向于零。速度分布满足：

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\tau_w}{\mu}$$

湍流场中，速度分布常常写成所谓**壁面律**的形式，即

$$u^+ = f(y^+) \text{ 也即 } \frac{\bar{u}}{u_\tau} = f\left(\frac{yu_\tau}{\nu}\right)$$

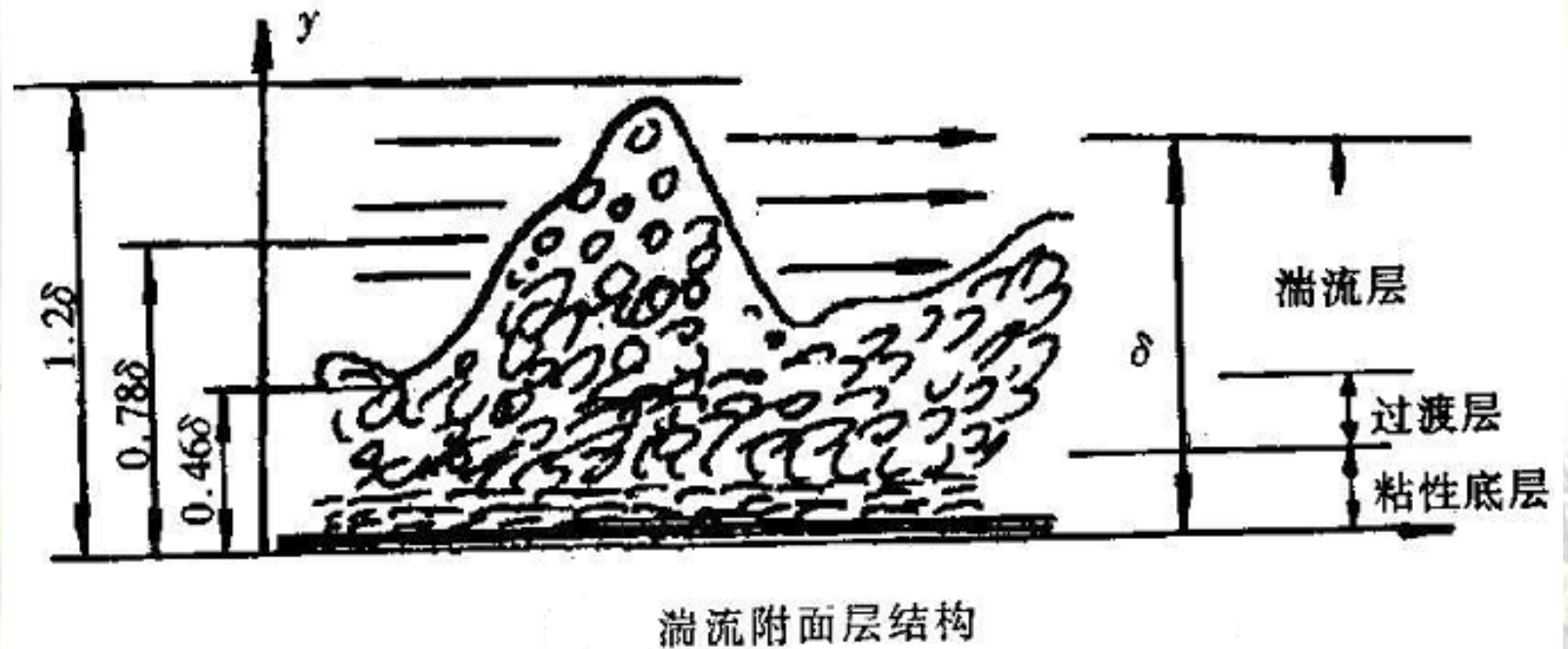
的形式。其中

$$u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$$

是摩擦速度， \bar{u} 是时均速度， y^+ 是无量纲离壁距离。

对于粘性底层($y^+ < 5$)，壁面律的形式是 $f=1$ 。

离开粘性底层往上，粘性切应力逐渐减小，而湍流剪切应力逐渐增大，这是所谓的**过渡层**，这里粘性切应力与湍流剪切应力的量级相同，壁面律的形式非常复杂。



再往上，湍流剪切应力远大于粘性切应力，后者几乎可以忽略。这个区域称为**湍流(核心)区**。这个区里的壁面律的形式是对数函数的形式：

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B$$

其中, $\kappa \approx 0.41, B = 5.5$

在与外部势流的交界面处，湍流不是突然消失的。这里流动时而是湍流的，时而又是非湍流的势流。这个区域称为**间歇层**。

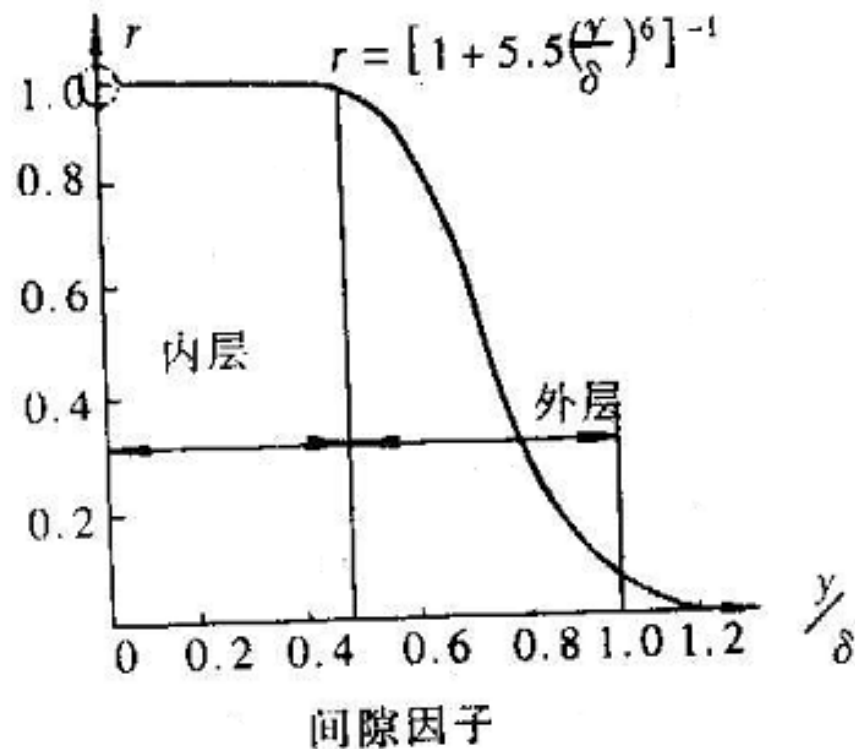
为确定间歇性的变化，定义一个因子，称为间歇因子，定义为在某一段时间内，在所考虑的流动区域内：

$$\text{间歇因子} = \frac{\text{涡旋占据的时间}}{\text{总时间}}$$

当 $\gamma=1$ 的区域称为内层；

而 $\gamma < 1$ 的区域称为外层。

但是请注意，对湍流边界层的划分，仍然是以时均流速达到 $0.99V_{\infty}$ 为准的。



关于湍流边界层中的速度分布，形式和经验公式都很多。

有时，着眼于边界层内的流速与外部主流流速的差额，因此可采用所谓的亏损律分布形式。所谓亏损，是主流流速减去边界层内的流速，而亏损律是把这个差值通过摩擦速度和无量纲离壁距离表示的函数。

对于湍流边界层的外层，因为湍流是间歇性的，所以采用另一个分布函数形式，称为尾迹律。

请参见Schlichting的《边界层理论》。

[5]边界层的厚度

◎位移厚度——由于边界层的存在，实际流过边界层内的流体质量比理想情况时的减小，其减小量为

$$\int_0^{\delta} (\rho_0 U - \rho u) dy$$

设这个减小量与主流流过的厚度为 δ_1 的流层内的流量 $\rho_0 U \delta_1$ 相等，则

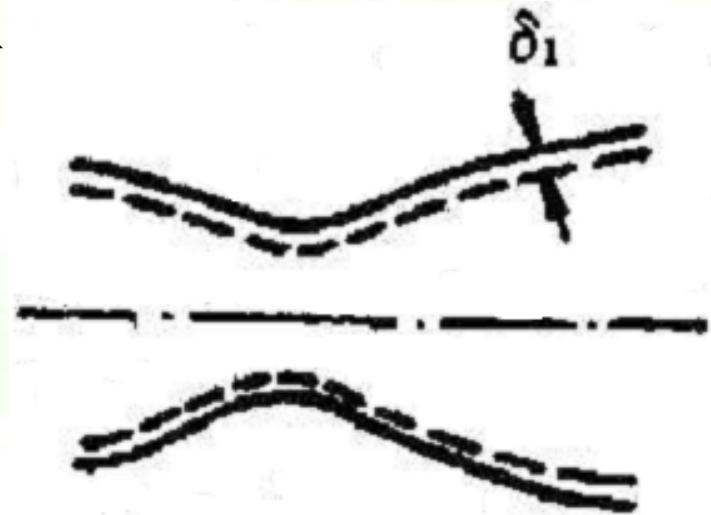
$$\delta_1 = \frac{1}{\rho_0 U} \int_0^{\delta} (\rho_0 U - \rho u) dy \stackrel{\text{不可压流}}{=} \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy$$

这个量称为位移厚度，也称为流量损失厚度。它表示由于边界层的存在，实际流过边界层内流量的减少量。

位移厚度的意义在于设计流道时，实际情况比按理想流体计算的要厚一些，这是由于粘性的因素。这个差别量就是位移厚度。

例如设计喷管时，先按理想流体求得喷管的理想型面，再根据得到实际的型面。

有时，计算外部无粘流时，应该在绕流物体壁面上加上一层位移厚度，作为外流边界。



附面层修正之喷管

◎动量厚度和能量厚度

边界层的存在，同时使得流体的动量和能量比理想情况要小，因此可以引入动量损失厚度和能量损失厚度。

因为边界层的存在，动量损失为 $\int_0^\delta (\rho_0 u U - \rho u^2) dy$

主流在单位时间内通过某个厚度 δ_2 的动量为 $\rho_0 U^2 \delta_2$

因此动量(损失)厚度为

$$\delta_2 = \frac{1}{\rho_0 U^2} \int_0^\delta \rho u (U - u) dy \stackrel{\text{不可压流}}{=} \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right)$$

◎能量损失厚度

能量损失为

$$\frac{1}{2} \int_0^{\delta} (\rho_0 u U^2 - \rho u^3) dy$$

主流在单位时间内通过某个厚度 δ_3 的能量为

$$1/2 \rho_0 U^3 \delta_3$$

因此能量(损失)厚度为

$$\delta_3 = \frac{1}{\rho_0 U^3} \int_0^{\delta} \rho u (U^2 - u^2) dy \stackrel{\text{不可压流}}{=} \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u^2}{U^2} \right) dy$$

◎形状因子

工程上，常用这些厚度的比值来刻画边界层内的速度分布

$$H_{12} = \delta_1 / \delta_2 \quad H_{23} = \delta_2 / \delta_3$$

这些参数都称为形状因子。 H_{12} 越小，边界层的形状显得越厚。对均匀流中放置的平板，层流时 H_{12} 约为 2.6，而充分发展的管流的形状因子 H_{12} 约为 1.4。对于湍流边界层， H_{12} 比层流的小。

§ 7.2 边界层微分方程式

[1] 层流边界层

边界层方程是Prandtl根据边界层的特点，把N-S方程简化得到的。

下面以忽略质量力的不可压缩粘性流体来研究层流流动的边界层方程。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right) \end{array} \right.$$

根据边界层的流动特点，上面的方程可以进行简化。为此，来考虑N-S方程组中各项在边界层内的量级大小。

选择来流速度 V_∞ 为特征速度、特征长度 L 为基准，把N-S方程进行无量纲化。

方程中各量的无量纲化为：

$$x^* = x/L, y^* = y/L, V_x^* = V_x/V_\infty, V_y^* = V_y/V_\infty, \\ t^* = tV_\infty/L, p^* = p/\rho V_\infty^2$$

把这些无量纲量代入N-S方程，得到

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_x^*}{\partial x} + \frac{\partial V_x^*}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial V_x^*}{\partial t^*} + V_x^* \frac{\partial V_x^*}{\partial x^*} + V_y^* \frac{\partial V_x^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 V_x^*}{\partial y^{*2}} \right) \\ \frac{\partial V_y^*}{\partial t^*} + V_x^* \frac{\partial V_y^*}{\partial x^*} + V_y^* \frac{\partial V_y^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V_y^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 V_y^*}{\partial y^{*2}} \right) \end{array} \right.$$

其中 $\text{Re} = \rho V_\infty L / \mu$

因为 $\delta^* = \delta/L \sim 1/\sqrt{Re}$ ，所以当 Re 很大时, $\delta^* \ll 1$

根据这点, 来估计N-S方程中的各项量级大小。首先假设 $x^* \sim O(1), V_x^* \sim O(1)$, 这样 $\partial V_x^*/\partial x^* \sim O(1)$ 又因为 $y^* \sim O(\delta^*)$, 所以按照连续方程, 可得

$$V_y^* \sim O(\delta^*)$$

在此基础上, 可以得到N-S方程中所有速度项的量级, 比如

$$\frac{\partial V_x^*}{\partial y} \sim O\left(\frac{1}{\delta^*}\right) \quad \frac{\partial^2 V_x^*}{\partial x^2} \sim O(1) \quad \frac{\partial^2 V_x^*}{\partial y^2} \sim O\left(\frac{1}{\delta^{*2}}\right)$$

把它们全部列出在N-S方程中，

$$\frac{\partial V_x^*}{\partial t^*} + V_x^* \frac{\partial V_x^*}{\partial x^*} + V_y^* \frac{\partial V_x^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 V_x^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

$O(1)$ $O(1)$ $O(1)$ $O(\delta^{*2})$ $O(1)$

$$\frac{\partial V_y^*}{\partial t^*} + V_x^* \frac{\partial V_y^*}{\partial x^*} + V_y^* \frac{\partial V_y^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V_y^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 V_y^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

$O(\delta^*)$ $O(\delta^*)$ $O(\delta^*)$ $O(\delta^{*3})$ $O(\delta^*)$

忽略掉所有的关于 δ^* 的一次方(包括一次方)以上量级的各项, 保留所以的压力项, 得到

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

这就是边界层的微分方程。从此方程组的第三个方程可见, 沿边界层的横向, 有

$$p = p(x) = p_e(x)$$

换言之, 边界层内的压力在垂直于壁面方向上是相等的, 而且等于外缘处(无粘流)的压力。

边界层外缘处的压力可用势流速度得出。外缘处的速度也可由势流得出。根据Bernoulli方程，有

$$p_e + (1/2)\rho v_e^2 = Const.$$

所以，也可把动量定理中的速度梯度改写成：

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx} = -\rho v_e \frac{dv_e}{dx}$$

对于绕曲面的流动，只要曲率不是很大，就可以采用边界层流动方程，此时y轴垂直物面，而x轴沿着物面。

[2]湍流边界层微分方程

对于湍流边界层，在按照时均量表示时，只需要考察Reynolds应力。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial \overline{v_x'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v_x' v_y'}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = - \left(\frac{\partial \overline{v_x' v_y'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v_y'^2}}{\partial y} \right) \end{array} \right.$$

其中，时均符号“-”被省略了。

根据湍流的各向同性，可认为 $\overline{v_x'^2} = \overline{v_x'v_y'} = \overline{v_y'^2}$

但由于 $x^* \sim O(1)$, $y^* \sim O(\delta^*)$, 所以可得:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial \overline{v_x'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v_x'v_y'}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial \overline{v_y'^2}}{\partial y} \end{array} \right.$$

从最后一式可见，由于Reynolds应力的存在，湍流边界层内的压力沿垂直于壁面方向有一些变化。

$$p = p_e - \rho \overline{v_y'^2}$$

把这最后一式代入湍流边界层方程，可得：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{dp_e}{dx} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} - \frac{\partial \overline{v'_x v'_y}}{\partial y} - \frac{\partial (\overline{v_x'^2} - \overline{v_y'^2})}{\partial x} \end{array} \right.$$

再按各向同性性质，最后一项可以忽略，所以得

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{dp_e}{dx} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \end{array} \right.$$

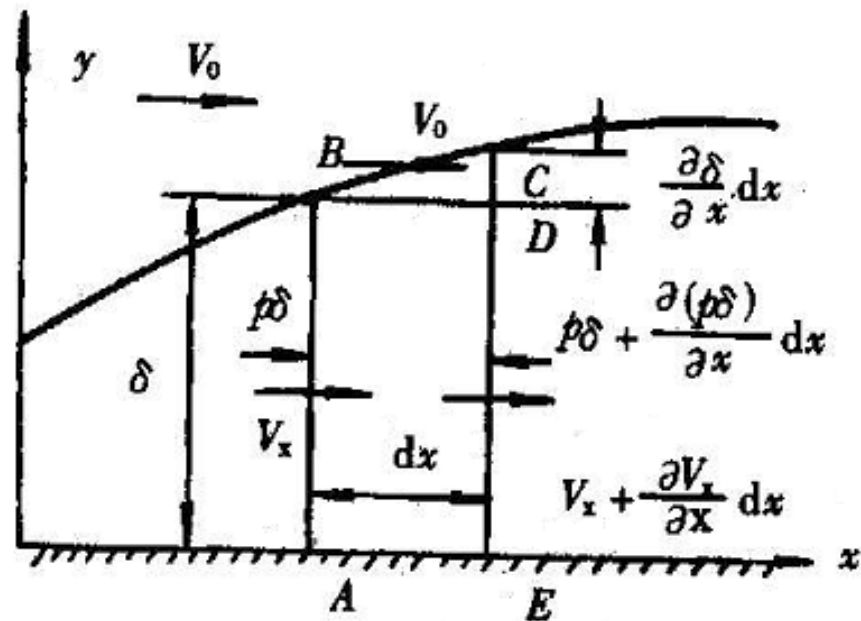
这里的 τ 是湍流中的总应力 $\tau = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} - \rho \overline{v'_x v'_y}$ ，在这种写法下，层流边界层流动的微分方程也相同。

§ 7.3 边界层积分方程（Karman动量积分方程）

[1] Karman动量积分方程

工程上,常用Karman动量积分方程来近似求解边界层内的平均流动特性。现在来推导这个方程。

左边是从边界层内选取的一个控制体。其两个侧面分别垂直于壁面，相距 dx ，上面是边界层的外缘，底面是壁面。



附面层分析

我们来考察沿流动方向(x轴)的动量变化。
首先考察作用在控制体上的力。

在左侧的面上，作用力为： $p\delta$

在右侧的面上，作用力为： $-\left[p\delta + \frac{\partial(p\delta)}{\partial x} dx \right]$

在上边界的面上，因为压力的变化在 dx 内不大，所以以其中点值为平均压力，得作用力为：

$$\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \frac{\partial \delta}{\partial x} dx$$

乘以后面的量表示在 x 方向的投影值。

在下边界的面上，作用力为： $-\tau_w dx$
这里， τ_w 是壁面切应力，它沿着x负向。

这样，作用在控制体上沿x方向的总作用力为：

$$\sum F_x = -\left(\tau_w + \delta \frac{\partial p}{\partial x}\right) dx$$

再来考察控制体内的动量。控制体内的总动量为：

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_x dV = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^\delta \rho v_x dy \right) dx$$

沿左侧面流入的动量通量为： $\int_0^{\delta} \rho v_x^2 dy$

沿右侧面流出的动量通量就可以写成：

$$\int_0^{\delta} \rho v_x^2 dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta} \rho v_x^2 dy \right) dx$$

底面没有流体进出。但是上边界因为不是流线，所以必须考虑通过该面的动量通量。为求动量通量，必须先确定出通过该面的质量流量。

因为通过上边界的流量按照连续方程等于从左右两侧面净流出的流量加上控制体内部的质量变化率，即

$$\int_0^\delta \rho v_x dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho v_x dy \right) dx - \int_0^\delta \rho v_x dy + \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\int_0^\delta \rho dy \right) dx \right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^\delta \rho dy \right) dx + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho v_x dy \right) dx$$

因为边界层的外边界的流速为外部主流速度 V_∞ ，所以控制体内，沿 x 方向上的动量变化为：

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^\delta \rho v_x dy \right) dx + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho v_x^2 dy \right) dx - V_\infty \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^\delta \rho dy \right) dx - V_\infty \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho v_x dy \right) dx$$

联合上面的结果，得到控制体内沿x方向的动量定理为：

$$\begin{aligned} -\left(\tau_w + \delta \frac{\partial p}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^\delta \rho v_x dy \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho v_x^2 dy \right) \\ &\quad - V_\infty \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^\delta \rho dy \right) - V_\infty \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho v_x dy \right) \end{aligned}$$

这就是最一般形式的Karman动量积分方程。

定常不可压缩流动中，Karman动量积分方程可简化为下列形式：

$$-\frac{1}{\rho} \left(\tau_w + \delta \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta v_x^2 dy \right) - V_\infty \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta v_x dy \right)$$

进一步，因为压力梯度项可用Bernoulli方程与外部无粘流的参数联系，即

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho V_\infty \frac{dV_\infty}{dx} \quad \text{即} \quad \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \int_0^\delta \frac{\partial p}{\partial x} dy = -\frac{dV_\infty}{dx} \int_0^\delta V_\infty dy$$

另外

$$V_\infty \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta v_x dy \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta V_\infty v_x dy \right) - \frac{dV_\infty}{dx} \int_0^\delta v_x dy$$

这样，定常不可压流体流动的Karman动量积分方程可化为：

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta} (V_{\infty} v_x - v_x^2) dy \right] + \frac{dV_{\infty}}{dx} \int_0^{\delta} (V_{\infty} - v_x) dy$$

按照边界层厚度的定义，这就成为：

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx} (V_{\infty} \delta_2) + \delta_1 V_{\infty} \frac{dV_{\infty}}{dx}$$

或
$$\frac{c_f}{2} \equiv \frac{\tau_w}{\rho V_{\infty}^2} = \frac{d\delta_2}{dx} + (2 + H_{12}) \delta_1 \left(\frac{1}{V_{\infty}} \frac{dV_{\infty}}{dx} \right)$$

这就是最常用的定常、不可压流动的

Karman动量积分方程。

[说明]

- ①上面式中的 c_f 是沿壁面的摩擦系数，常称为当地摩阻系数。上面同时也给出了它的定义。
- ②Karman动量积分方程中共有 τ_w 、 δ 和 v_x 三个未知数， V_∞ 也通过外部主流区求得。这样方程还缺少条件。因此求解时需要补充两个方程。
- ③但更多是直接假设所求解的速度分布具有某种形式，这是Karman的学生Polhausen使用的方法。

[2]平板边界层的求解

1、层流

Polhausen假设：平板内的速度分布可以用多项式表示：

$$\frac{u}{V_\infty} = a + b\left(\frac{y}{\delta}\right) + c\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + d\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

或者 $\frac{u}{V_\infty} = a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3$ ， 其中 $\eta = y/\delta$

这样，按定义得出 $\delta_1, \delta_2, \tau_w$ 。代入动量积分方程。解出 δ 。

速度分布 $f(\eta)$	$\delta \sqrt{\text{Re}_x}/x$	$\delta_1 \sqrt{\text{Re}_x}/x$	$\delta_2 \sqrt{\text{Re}_x}/x$	$c_f \sqrt{\text{Re}_x}/2$
η				
$2\eta - \eta^2$	5.47	1.826	0.731	0.365
$1.5\eta - 0.5\eta^2$				
$2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$				
$\sin(\pi\eta/2)$				
Blasius 解	5.00	1.721	0.664	0.332

其中（当地）摩擦阻力系数为

$$c_f = \frac{\tau_w}{(1/2)\rho_\infty V_\infty^2}$$

总摩擦阻力定义为：

$$C_D = \frac{1}{(1/2)\rho_\infty V_\infty^2 L} \int_0^L \tau_w dx = \frac{1}{L} \int_0^L c_f dx$$

对平板层流边界层，Blasius通过解边界层微分方程得到的摩阻系数分别为：

$$c_f = 0.664 / \sqrt{\text{Re}_x} \quad C_f = 1.328 / \sqrt{\text{Re}_L}$$

2、湍流边界层

对湍流边界层，层流时所采用的速度分布和切应力方法已经不能使用于湍流边界层了。通常按圆管中湍流分析的结果给出平板边界层的补充关系。

利用Prandtl的1/7次方规律计算时均速度：

$$\frac{u}{V_{\infty}} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7}, 4000 < \text{Re} < 10^5$$

在 $5 \times 10^5 < \text{Re}_x < 10^7$ 的范围内，切应力可用 Blasius 提出的管内流动壁面切应力公式来计算平板壁面的切应力：

$$\tau_w = 0.0225 \rho_\infty V_\infty^2 \left(\frac{\nu}{V_\infty \delta} \right)^{1/4}$$

把这些关系式代入 Karman 动量积分方程中，并假设压力梯度为零，则得到：

$$-0.0225 \rho_\infty V_\infty^2 \left(\frac{\nu}{V_\infty \delta} \right)^{1/4} = \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho V_\infty^2 \left[\left(\frac{y}{\delta} \right)^{2/7} - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \right] dy$$

积分后整理，得

$$-0.0225 \left(\frac{v}{V_\infty \delta} \right)^{1/4} = \frac{d}{dx} \left(\frac{7}{9} \delta - \frac{7}{8} \delta \right) = -\frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx}$$

将上式分离变量，再积分得

$$\left(\frac{v}{V_\infty} \right)^{1/4} x = 3.46 \delta^{5/4} + C_1$$

式中的 C_1 是积分常数。由于湍流边界层的起点及其所对应的边界层厚度均难以确定，因此直接求解 C_1 有点困难。

如果假设湍流起点在平板前缘处，即 $x=0$ 时， $\delta=0$ ，可得 $C_1=0$ ，这样边界层厚度为

$$\delta/x = 0.37 \text{Re}_x^{-1/5}$$

采用速度的七分之一一次方定律，可得位移厚度为：

$$\delta_1/x = 0.0463 \text{Re}_x^{-1/5}$$

考虑到实际有层流边界层的存在，可对上式进行修改，同时可将系数修正为更适合实验结果的系数，将在下面的阻力系数中给出阻力系数的修正公式。

六、流动阻力

流动阻力主要是由摩擦阻力和压差阻力所组成。前者是物体表面切应力在来流方向上的总和；后者是指物体表面上的压力所引起的合力在来流方向上的分量。

绕流中，常用两个阻力系数。一个称为当地摩阻系数：

$$c_f = \frac{\tau_w}{\rho V_\infty^2 / 2}$$

它反映了流体在壁面各点上的摩擦阻力大小。

另一个称为总摩阻系数。如果平板宽为 b ，长为 L ，则总摩阻系数为：

$$C_f = \frac{1}{L} \int_0^L c_f dx = \frac{1}{(1/2)\rho V_\infty^2 L} \int_0^L \tau_w dx$$

对前面介绍的湍流边界层，其总摩阻系数为：

$$C_f = \frac{0.072}{(\text{Re}_L)^{1/5}}$$

其中， Re_L 是以板长定义的Reynolds数。

更精确的总摩阻系数为：

$$C_f = \frac{0.074}{(\text{Re}_L)^{1/5}} - \frac{B}{\text{Re}_L}, 5 \times 10^5 < \text{Re}_L < 10^7$$

关于压差阻力的确定是一个困难的问题，常常通过实验或复杂的流场计算得到。如果按迎风面积确定的压差阻力系数为 C_D ，则总阻力为

$$F_D = C_D A_D \cdot \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2$$

来表示。这里的 A_D 称为物体的迎风面积，是指物体在来流方向上的投影面积；而摩擦阻力是：

$$F_f = C_f A \cdot \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2$$

§ 7.5 流动的分离

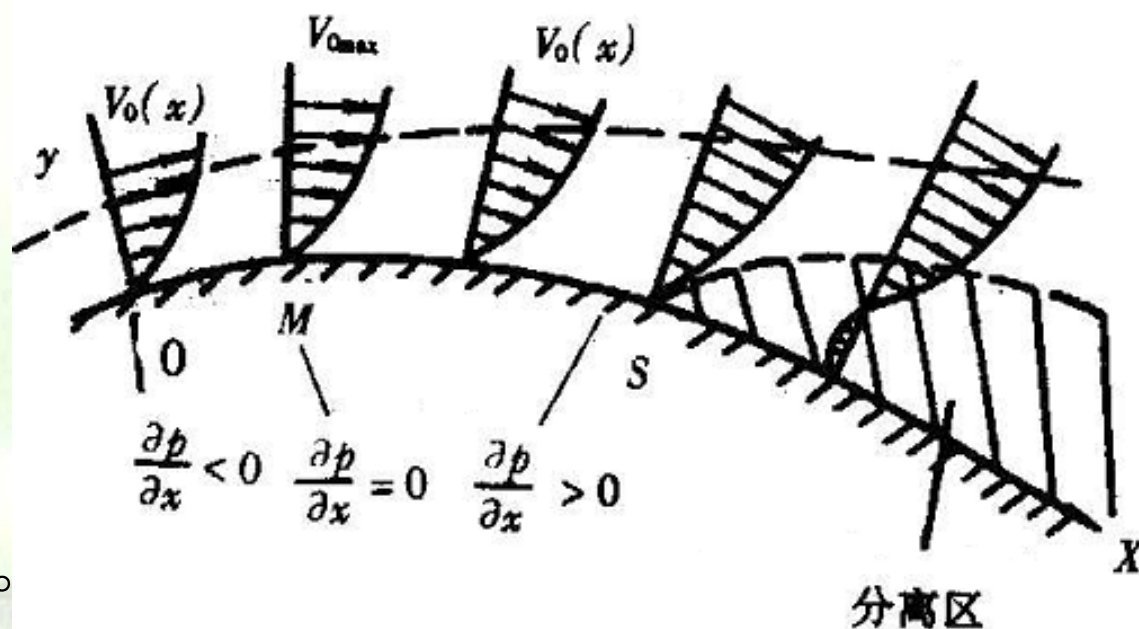
沿着边界层流动方向，由于要不断地克服沿程摩擦阻力，因此边界层内的流体要逐渐消耗掉动能，致使边界层内的速度减少。

实际流体流过物面时，特别是弯曲或拐折的壁面时，经常从某一点开始，边界层脱离壁面，并产生尾迹涡，这种现象称为边界层的分离，简称为**分离**。

发生分离的物理原因是存在逆压梯度的存在。

以机翼绕流为例。从前驻点到最大厚度处，边界层外主流是加速的，压力逐渐降低，压力能转化为了动能。这称为顺压梯度区。在顺压梯度区内，沿流动方向的作用力有助于克服壁面摩擦力，对边界层

内的流动有增速作用，从而减少了边界层厚度的增长率。

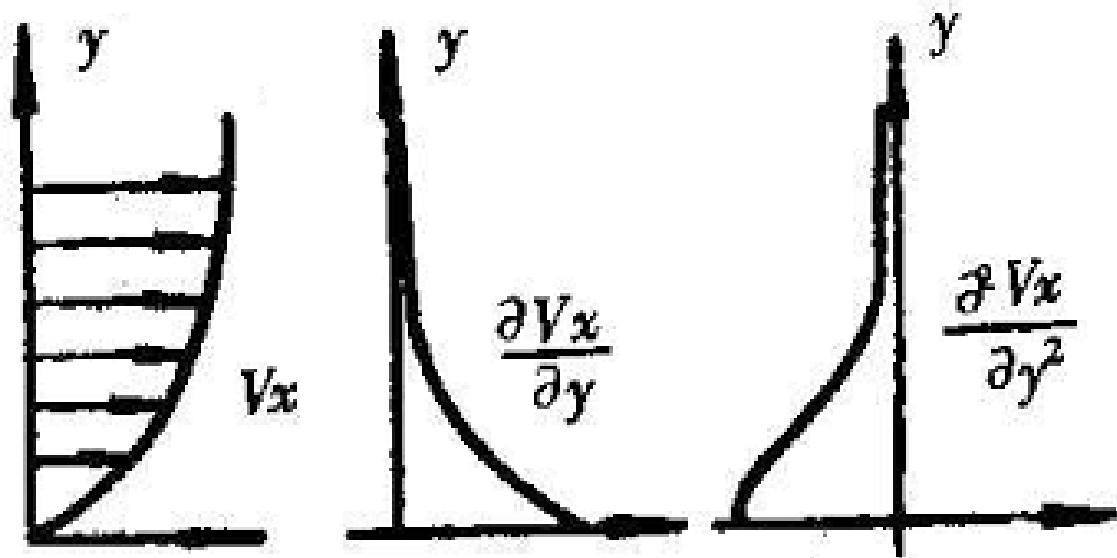


附面层分离及其速度分布

从最大厚度往后，主流是减速的，压力升高，动能转化为压力能，称为逆压梯度区。在逆压梯度区，沿着流动反方向的压差作用力将对边界层内的流动有减速作用，从而增大了边界层厚度的增长率。

如果逆压梯度很大，就能使边界层内的流动速度逐渐地减少为零，最终导致边界层在某处出现分离(或称为脱体)。

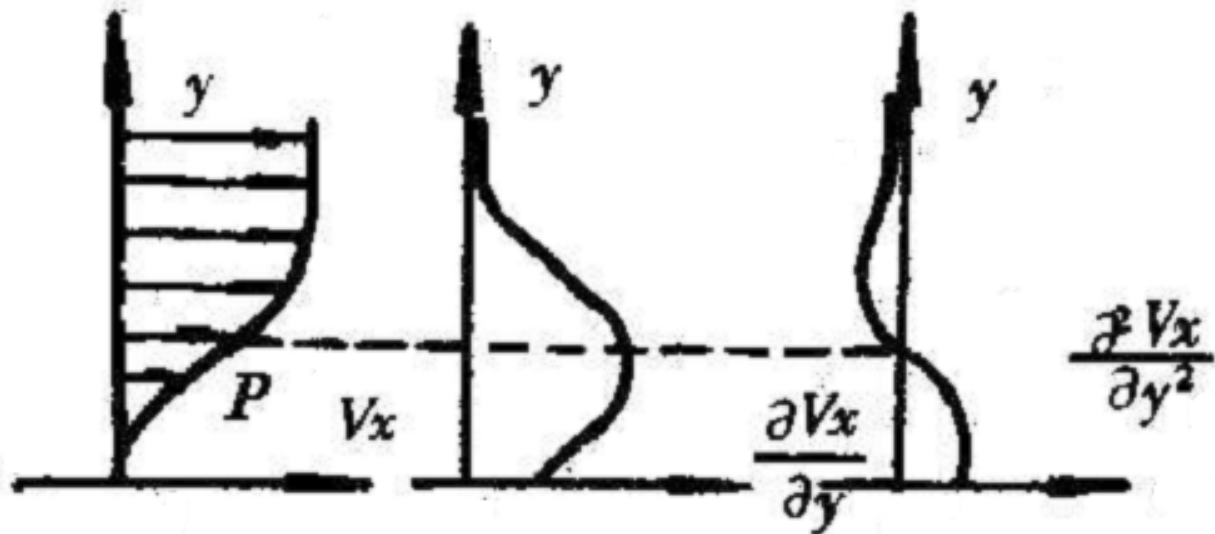
可见，在顺压梯度区： $\partial u / \partial y > 0, \partial^2 u / \partial y^2 < 0$



$$dp/dx < 0$$

顺压力梯度下速度分布特征

在逆压梯度区： $\partial u/\partial y > 0, \partial^2 u/\partial y^2 > 0$



$$dp/dx > 0$$

逆压力梯度下速度分布特征

因此，在分离点处，必有：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w = 0 \quad \text{或} \quad \tau_w = 0$$

请注意，这是**流动分离的必要条件**。

发生分离后，在物体的后面形成了分离区，分离区将严重影响外流的边界，因此不能再认为粘性起作用的区域只是限制在固体物面附近的一个薄层内了，也就是说，边界层理论完全失效。并且从上面的讨论中可知，只有在逆压梯度区域，边界层才可能分离。

流动分离的控制

流体机械和涉及到流体动力的问题，避免流动分离总是十分重要的。因为流动一旦分离，流动损失是非常大的，而且由分离还会造成其他的问题，如气动力激振等。

对外部绕流，采用流线性的绕流物体；对内流，控制管道的扩张角过大都是为了避免边界层分离。

除了这些被动式的分离控制外，还可以采用主动控制技术。

流动减阻，是一个目前方兴未艾的学科领域。

习题：

p.176

Ex.7-1

Ex.7-4

Ex.7-7

