第九章 气体动力学基础

一、微弱扰动在气流中的传播

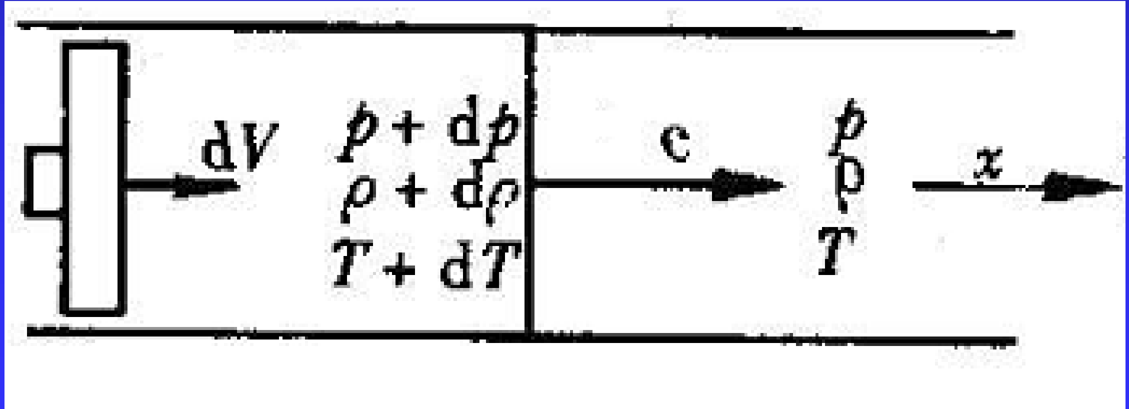
1、音速和马赫数

音速是微弱扰动在流场中的传播速度。微弱扰动通常是流场中某个位置上的压强产生了微小的变化。

在不可压缩流动中，任何扰动总是立即传播到整个流场，但是在可压缩流里，不是在任何情况下都能传播到整个流场，微弱扰动在流场中是按一定的速度传播的，这个速度就是音速。

考虑一个直圆管，里面充满了压强为p、密度为ρ、温度为T的静止气体。

如果圆管内的活塞运动，将压缩(或膨胀)最相邻的气体层，致使那层气体的压强升高(或降低)、温度升高(或降低)。这层气体又去压缩另外的气体层。这样将在管道内形成微弱扰动的压缩波(或膨胀波)，波面的传播速度假设为*c*，气体本身也将随活塞一起运动，其运动速度将和活塞的运动速度一致，是*dv*。

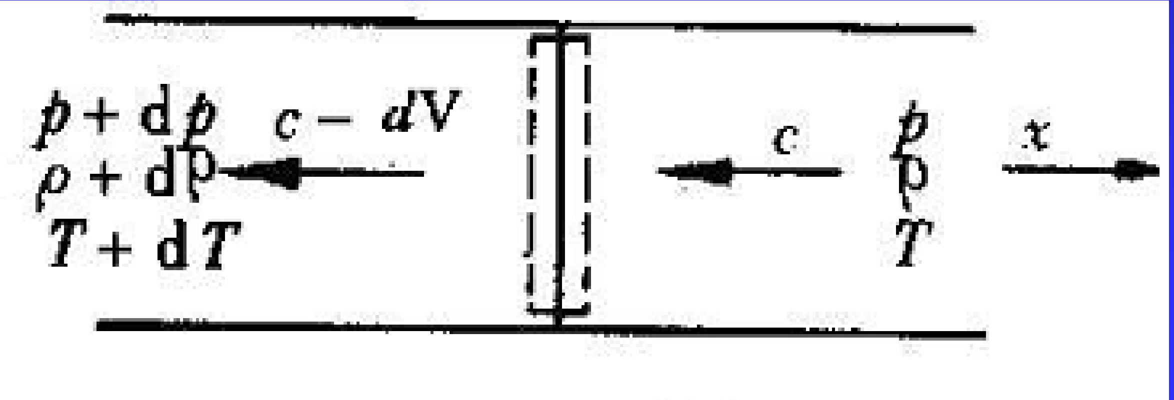


(a)

微弱扰动在半无限长管中的传播

请注意，压缩（或膨胀）波的波面速度是和活塞，因而是气体的运动速度不一致的！

现在来推导音速公式。由于微弱扰动在管道里的传播是一个非定常运动，因此假设研究者和波面一同运动。这样，波面是相对静止的，而波前气流速度为c，波后气流速度为c-dv，同时压强密度和温度分别由p、ρ和T升到p+dp、ρ+dρ和T+dT。



(b)
微弱扰动在半无限长管中的传播

在波面附近取一个微元体，有连续方程：

$$\rho_1 cA = (\rho_1 + d\rho)(c - dv)A$$

动量方程：$\rho_1 cA[(c - dv) - c] = [p_1 - (p_1 + dp)]A$

把dv消去，得到 $c^2 = \frac{dp}{d\rho}\left(1 + \frac{d\rho}{\rho_1}\right)$

因为我们讨论的是微弱扰动，故括号里的项近似为1。因此得到音速为：

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

对于微弱扰动，其热力学过程接近于绝热的可逆过程，即等熵过程。对完全气体，

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{d}{d\rho}\left(Const. \times \rho^{\gamma}\right) = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma RT$$

(1)音速的的大小是和流体介质有关：可压缩性大的介质，微弱扰动传播的速度慢、音速就小。

在20度的空气中，音速为343(m/s)；在20度的水里，音速为1478(m/s)。

(2)音速是状态参数的函数。在相同介质中，不同点的音速也不同。提到音速，总是指当地音速。

(3)同一气体中，音速随气体温度的升高而升高。

马赫数的定义

在音速定义后，可以定义马赫数：

$$M = V/c$$

(1) 马赫数是判断气体压缩性的标准，它是个无量纲量，也是气体动力学的一个重要参数.

(2) 按马赫数，可以将气流分成亚音速、音速和超音速流动。

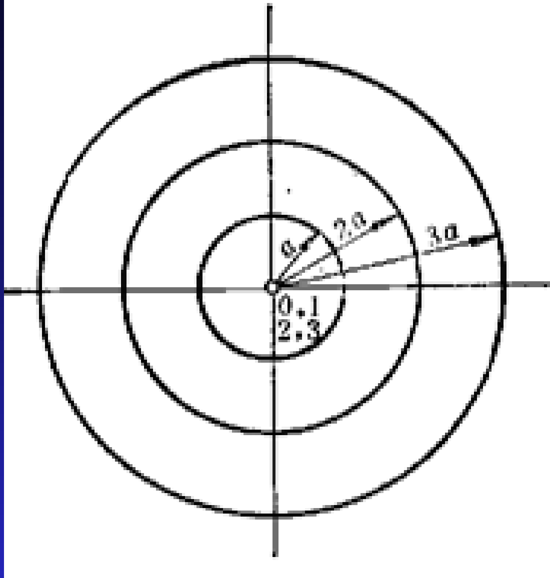
(3) 因为 $M^2 = V^2/c^2 = 1/k(k-1) \cdot V^2/c_v T$ 所以马赫数的物理意义是流体质点具有的动能与内能之比。

(4) 当M数越小，流体相对密度变化越小。通常认为，当M<0.3时，流体可当不可压流。

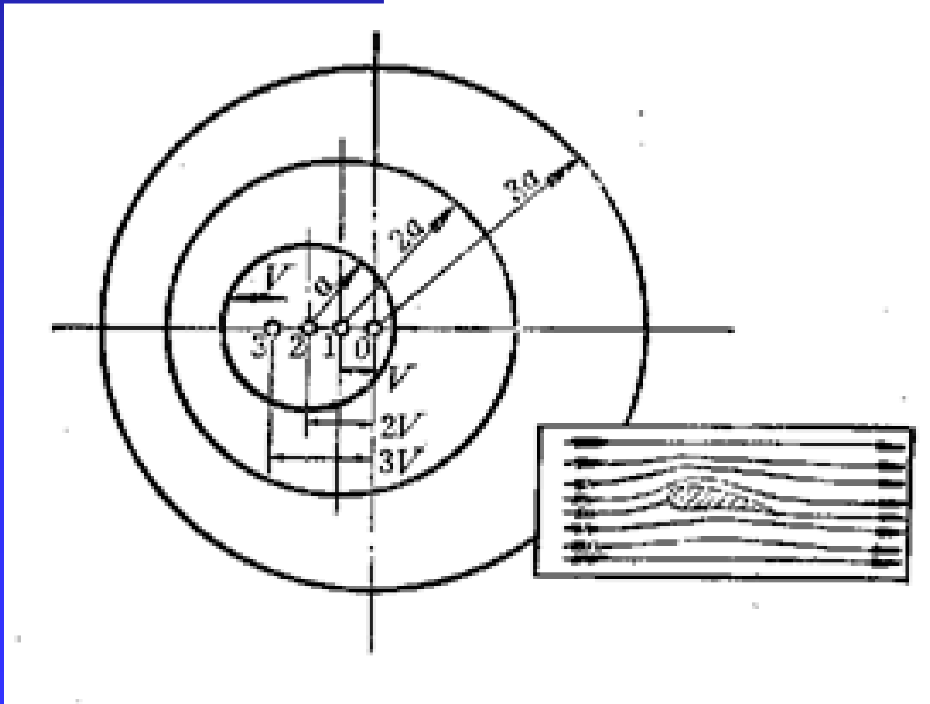
2、微弱扰动在气流中的传播规律

（1）扰动源在静止气体中的传播

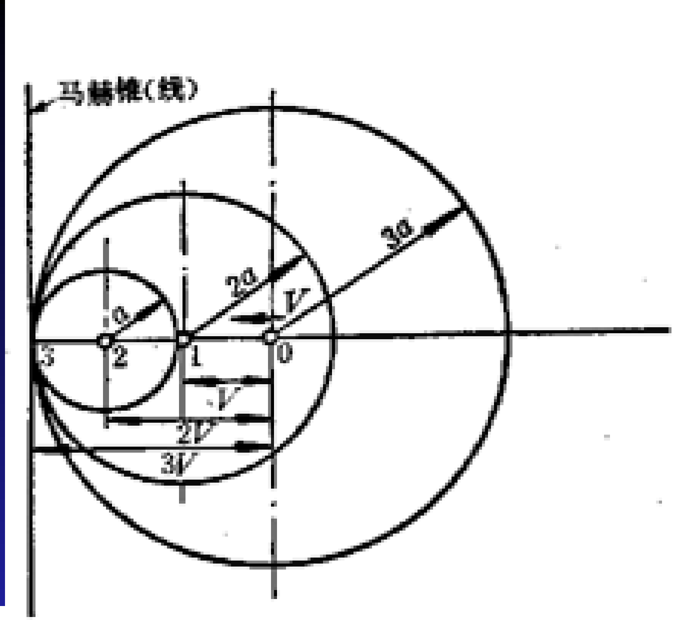
◎V=0，如图，微弱扰动波的前缘是以0为球心的球面。



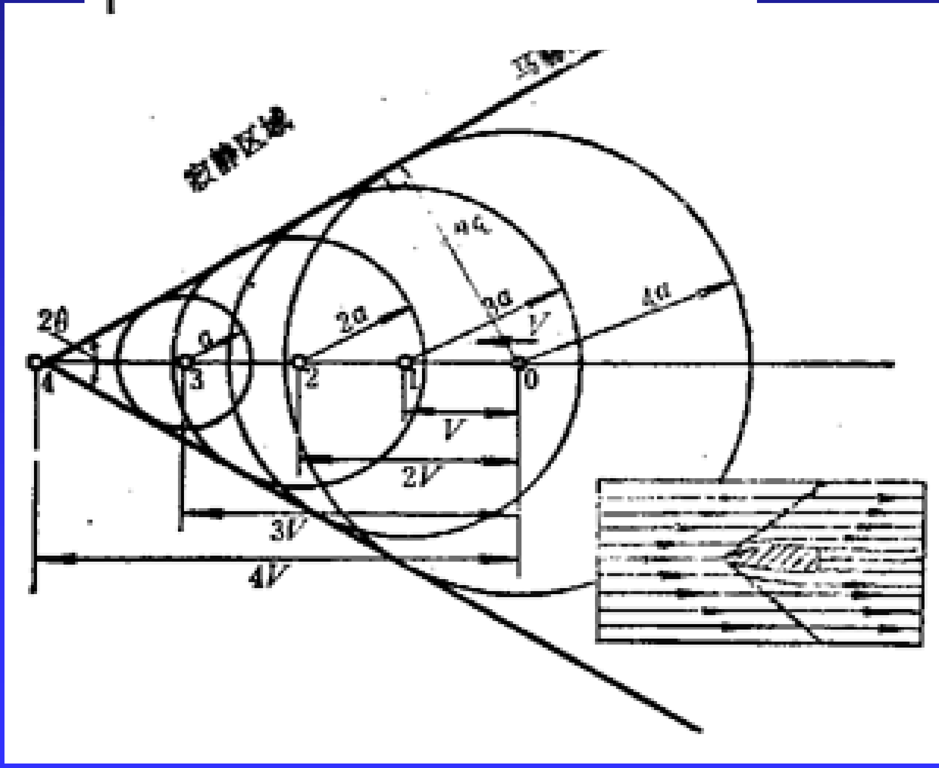
◎V<a，如图，扰动波前缘始终赶在扰动源的前面。微弱扰动波可达到空间任何一点。



◎V=a，如图，扰动波和扰动源同时达到空间某一位置。扰动波只能在绕动源下游的半个空间内传播。



◎V>a，如图，扰动源永远赶在扰动波前面。扰动波被限制在以扰动源为锥顶的圆锥内。在平面流动中就被限制在夹角为θ的两条马赫线内。θ又称为马赫角。

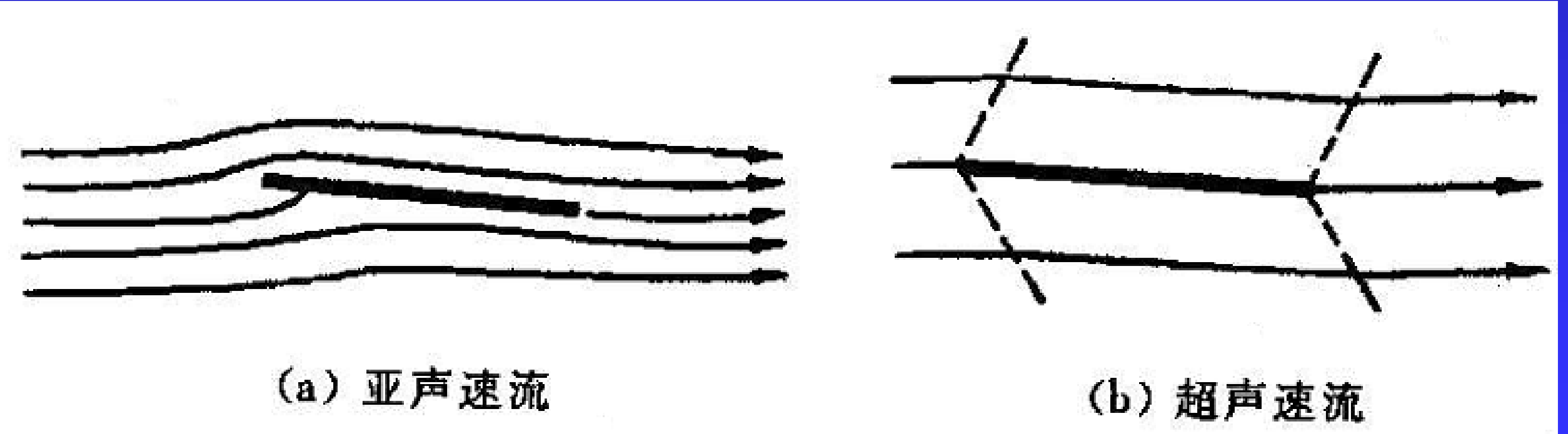


(2)亚音速和超音速气流的区别

微弱扰动的这种性质，使得亚音速气流与超音速气流有本质的差别。

在亚音速流动中，因为扰动可以四面八方地传播，因此气流在扰动的上方就能感受到扰动，从而进行参数调整。

而在超音速气流中，因为扰动限制于马赫锥内，所以上游的气流不能感知下游的物体产生的扰动，从而不能及时调整气流状态，只有当流动到达扰动源处，才能调整状态。



平板翼绕流的流线图

二、理想气体流动的基本方程

可压缩流所遵守的流动方程仍然是第三章所讨论的方程。工程上，常常对一维流动的情况特别感兴趣。

首先可以假设流动是定常理想的，并对管道流动按截面平均参数考虑，问题变成是一维的。

其次，气体的问题，质量力由于是跟密度成正比的，而密度通常不大，所以气体动力学的问题通常都是忽略质量力。

第三，由于气体动力学处理的是高速流动，因此常常作绝热假设，这就是说，气体速度太快，以至于来不及跟外界有热交换。

先来回顾一下流体力学的基本方程。

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV + \oint_A \rho\left(\vec{v}\cdot d\vec{A}\right) = 0$$

$$\sum \vec{F} = \iint_A \left(\rho\vec{v}\right)\left(\vec{v}\cdot d\vec{A}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\vec{v}dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(e+\frac{v^2}{2}+gz\right)+\int_A \rho\left(e+\frac{v^2}{2}+gz\right)\cdot\left(\vec{v}\cdot d\vec{A}\right)$$
$$=\int_V q_R dV + \int_A k\nabla T\cdot d\vec{A} + \int_V \rho\vec{f}\cdot\vec{v}dV + \int_A [\tau]\cdot\vec{v}\cdot d\vec{A}$$

在前面的假设下，一维气体流动下，连续方程、动量方程和能量方程分别是：

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

$$\left(p_2 + \rho_2 V_2^2\right)A_2 - \left(p_1 + \rho_1 V_1^2\right)A_1 = F$$

$$\left(h_2 + \frac{V_2^2}{2}\right) - \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2}\right) = q$$

微分形式的方程是：

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{\rho} + \dfrac{dv}{v} + \dfrac{dA}{A} = 0 \\ \dfrac{dp}{\rho} + vdv = 0 \\ dh + vdv = 0 \end{cases}$$

这样共是四个变量但只有三个方程，所以需要补充一个状态方程或者过程方程（常是作等熵假设）。

◎高维情况下的气体动力学方程

——略。

◎熵方程

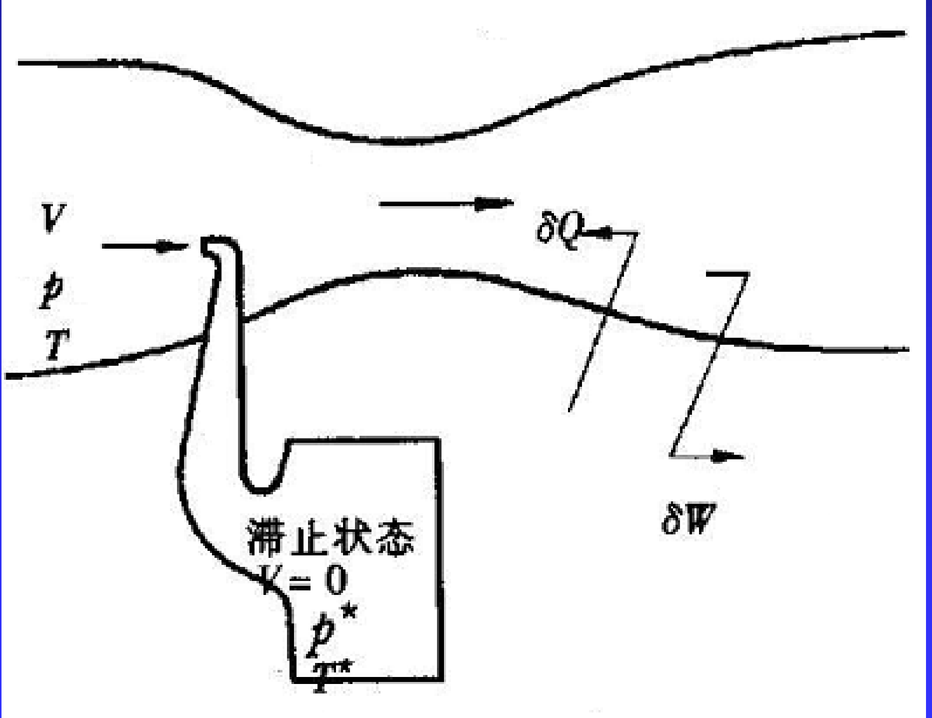
$$\frac{\partial S}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\nabla\right)S \geq \frac{q}{T}$$

三、参考状态

气体的参考状态主要有滞止过程、极限状态和临界状态。

1、 滞止状态

在气体流动中，为了描述流场中某点的状态，常常给出该点气流的压强、密度、温度等热力学参数。这些参数在气体动力学中被称为静参数。如果假想按照等熵过程把气流滞止到零，这个时候的气体状态称为滞止状态，所对应的热力学参数称为滞止参数或者总参数。



流动的滞止状态

滞止状态下，气体的速度为零，故由一维气体动力学方程，得到

$$h+\frac{V^2}{2}=h^*=C$$

此式表明，气流滞止时的焓是最大的。流体质点所能进行转化的焓包括了静焓和动能两部分。因此气流的总焓就是流体质点所具有的总能量。

另外，上式很容易写成：$$T^*=T+\frac{V^2}{2c_p}$$

此式表明，总温等于静温加上动能引起的温度变化，因此，后一项常称为动温。

从一维流的能量方程可知，当流动绝能时，总焓是不变的，同样总温也是不变的。

上面的式子进一步可改写为

$$\frac{T^*}{T}=1+\frac{k-1}{2}M^2$$

因为假设的滞止过程是绝能等熵的，所以由等熵关系可得：

$$\frac{p^*}{p}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

从中可见，气流的总静参数比只取决于当地马赫数。

说明

1、在气体动力学中，这组总静参数比具有非常重要的作用，几乎可以说与不可压缩流中的伯努利方程的作用等同。这将在下面看到。

2、总温总压的物理意义是：流场中一点处的总温是该点气流所具有的总能量的度量；而总压，则是总机械能的度量。

3、利用总静压强比公式，可以求得不考虑气体的压缩性所带来的误差。这个推导也表明了，在气体动力学中，总压、静压和动压的关系。

[例1]如图所示贮气箱中空气总压p_1^* =2.934×10^5Pa，总温T_1^*=288K，通过喷管进入压强p_a= =9.81×10^4Pa的大气中，若喷管出口截面压强p_2和大气压强相等，求出口截面上气流速度。(假定喷管中的流动绝能等熵)

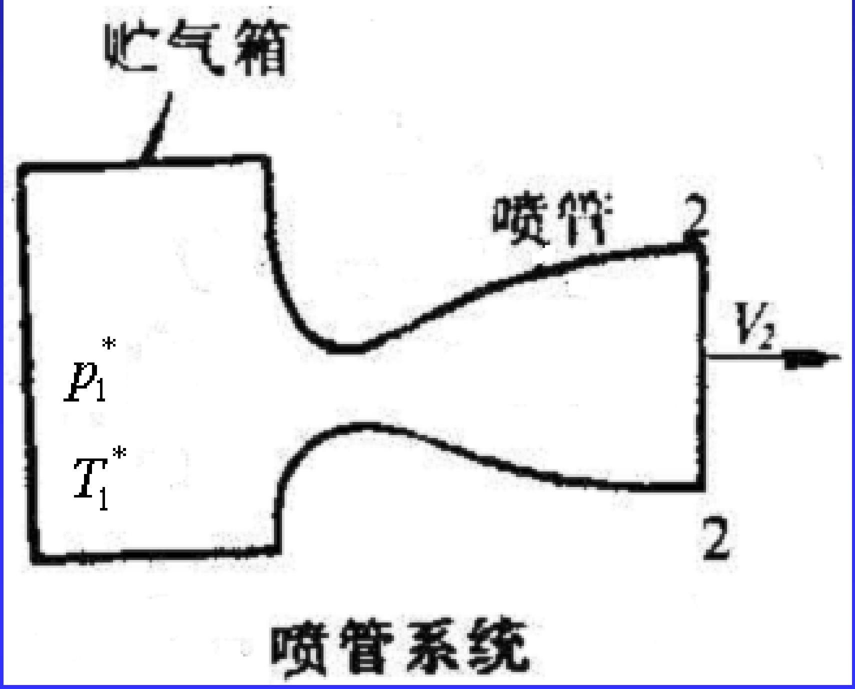
[解]因为喷管内的流动是绝能等熵的，所以有

$$p_1^* = p_2^* \qquad T_1^* = T_2^*$$

根据总静参数比公式：

$$M = \sqrt{\frac{2}{k-1}\left[\left(\frac{p_2^*}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right]} = 1.36$$

由M数及总温，可求得出口面上的静温，进而按马赫数定义求得速度。



2、极限状态

这是跟滞止状态相反的参考状态。

如果假设气流按等熵过程不断加速，气体的静焓将逐渐减小。当气体的温度降为绝对零度时，气流的速度将达到最大值。这个状态称为极限状态。此时气体的温度、压强和密度均为零，但温度具有最大值，此速度称为极限速度。极限速度是一点气流膨胀到绝对真空所能达到的最大速度。

从一维流的能量方程，

$$\frac{kRT}{k-1}+\frac{V^2}{2}=\frac{kRT^*}{k-1}=C$$

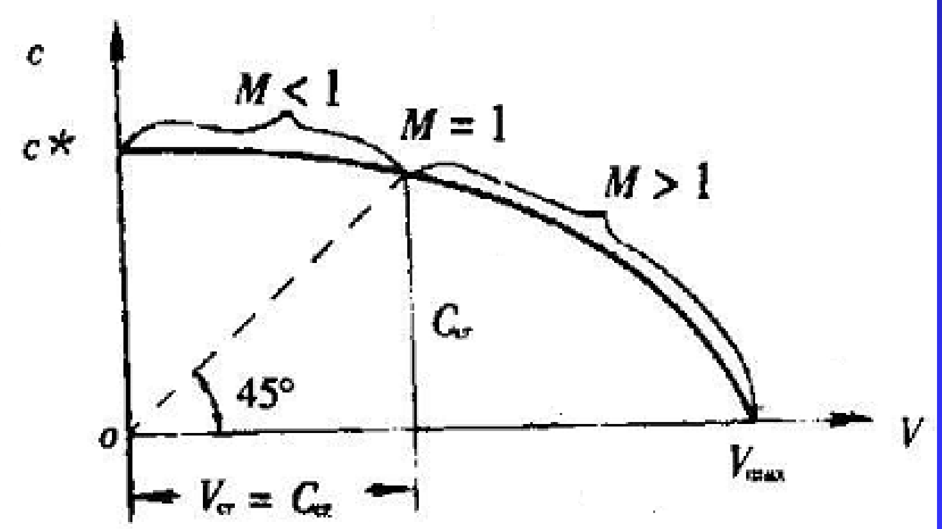
得到最大速度为：

$$V_{\max}=\sqrt{\frac{2}{k-1}RT^*}$$

3、临界状态

在v-c状态平面上，可以看到，当气体速度滞止为零时，当地音速达到滞止音速；当气流速度被加速到极限速度时，当地音速达到零。因此在气流速度由小变大的过程中，必然会出现气流速度恰好等于当地音速的状态，即Ma=1的状态，这就是临界状态。

临界状态也是一个假想状态。只有在音速点上，才能达到临界状态。



V—c 平面上的椭圆

临界状态的特点是$V_{cr}=c_{cr}$，因此临界音速为：

$$c_{cr}=\sqrt{\frac{2k}{k+1}RT^*}$$

对于其他的临界参数，按照总静参数比关系，可得：

$$\frac{T^*}{T_{cr}}=\frac{k+1}{2}$$

$$\frac{p^*}{p_{cr}}=\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_{cr}}=\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

特别需要申明，临界音速与音速不是同一个概念。

4、速度系数

速度系数是另一个无量纲速度，其地位与马赫数相同，引进速度系数的意义在于有时使用它比使用马赫数方便一些。

速度系数是速度与临界音速之比：

$$\lambda = V/c_{cr}$$

速度系数与马赫数之间的关系：

$$\lambda^2 = \frac{(k+1)M^2/2}{1+(k-1)M^2/2}$$

$$M^2 = \frac{2\lambda^2/(k+1)}{1-(k-1)\lambda^2/(k+1)}$$

可见

当M=0， λ =0；

当M=1， λ =1；

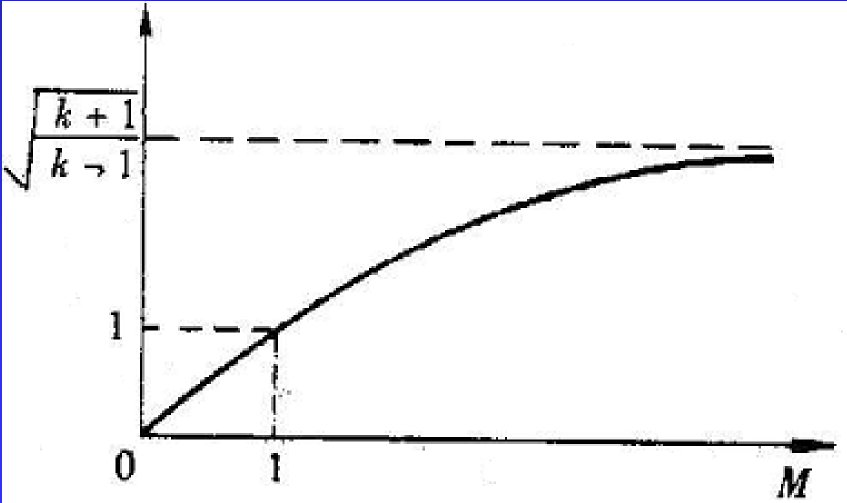
当M=∞， $\lambda=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$；

另外，总静参数比也可以通过速度系数表示：

$$\frac{T^*}{T}=\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{-1}$$

$$\frac{p^*}{p}=\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{-\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho}=\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{-\frac{1}{k-1}}$$



λ—M 的函数曲线

[例2]某发动机的尾喷管，进口燃气参数为：

$p_1^* = 2.934\times10^5 Pa$，$T_1^* = 790K$。

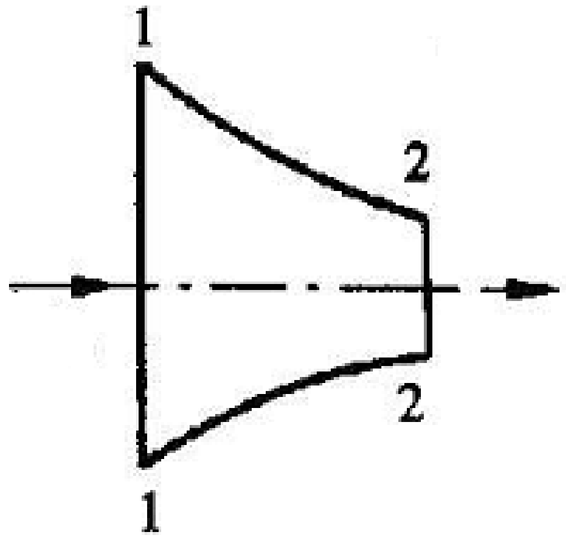
出口截面处达到音速状态，尾喷管的总压恢复系数 $\sigma = 0.98$。求出口截面的流速、静温和静压。

[解]因为喷管内的流动是绝能的，总温不变。另外出口截面上 $\lambda_1 = 1$，所以

$$p_{cr} = p_2^*\left(\frac{2}{k+1}\right)^{-\frac{k}{k-1}} = \sigma p_1^*\left(\frac{2}{k+1}\right)^{-\frac{k}{k-1}} = 1.248\times10^5 Pa$$

$$T_{cr} = T_2^*\left(\frac{2}{k+1}\right) = 678K$$

$$V_{cr} = c_{cr} = \sqrt{\frac{2k}{k+1}RT_2^*} = 509\, m/s$$



尾喷管

四、气体动力学函数

为避免每次都需要进行复杂的指数运算，特把各总静参数比等公式与M数或λ数的关系做成了图表，这类函数称为气动函数。这样只要M数或者λ数已知，便立即可查出相应的总静参数比或其他参数。

常用的气动函数有三类，共8个气动函数。

1、总静参数比函数

$$\tau = \frac{T}{T^*} \qquad \pi = \frac{p}{p^*} \qquad \varepsilon = \frac{\rho}{\rho^*}$$

因此：

$$\tau = 1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2 = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{-1}$$

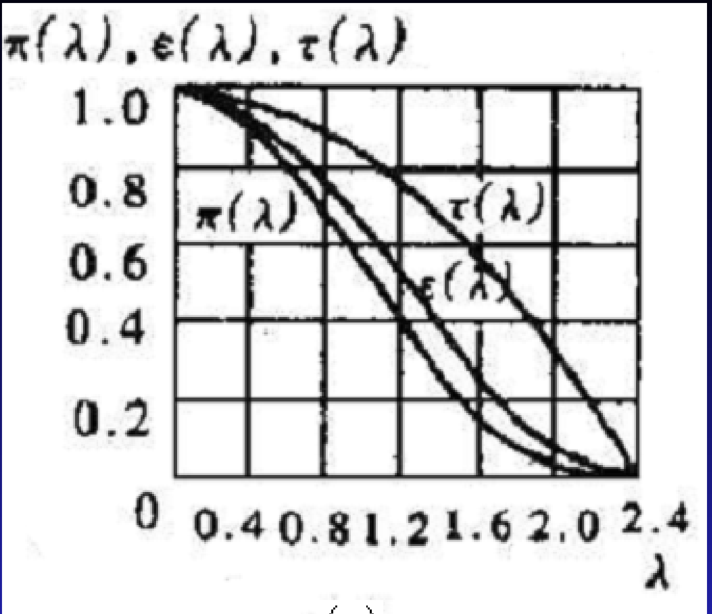
$$\pi = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{-\frac{k}{k-1}}$$

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{-\frac{1}{k-1}}$$

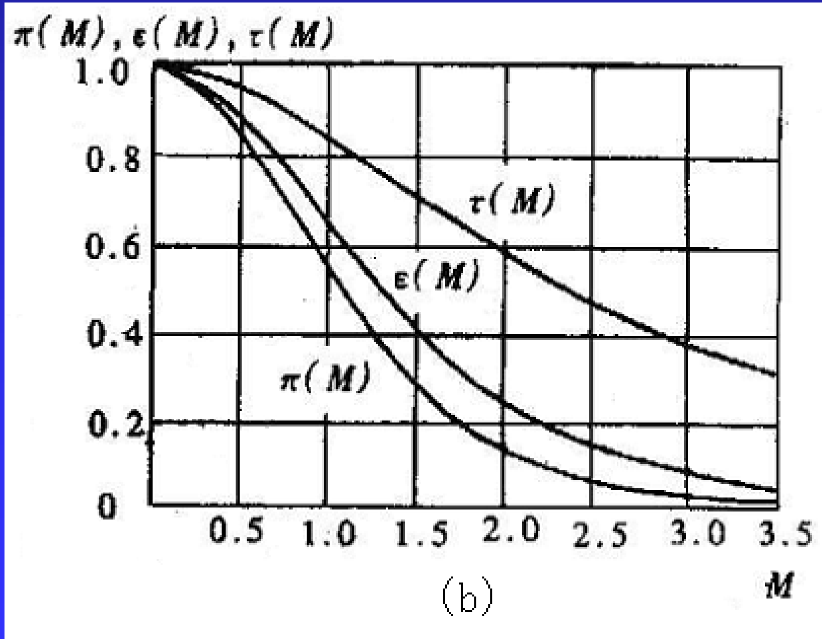
换言之，这些气动函数既可以按λ也可以按M数表示，只要知道其中之一，便可求得静参数与总参数之比。

(a)图是总静参数比与λ数的关系曲线；

(b)图是与M数的关系曲线。



(a)



(b)

τ、π、ε 的函数曲线

可见，它们都是单调函数，最大值为1，最小值为零。

[例3]在如图的超音速喷管中，已知截面1上静压为p_1=5.88×10^5Pa，总温T_1^*=310K，速度系数λ_1=0.6，截面2上静温T_2=243K，求气流在截面2上的压强和速度系数(假定流动是绝能等熵的)。

[解]按流动是绝能等熵的，故 $p_1^* = p_2^*$ $T_1^* = T_2^*$

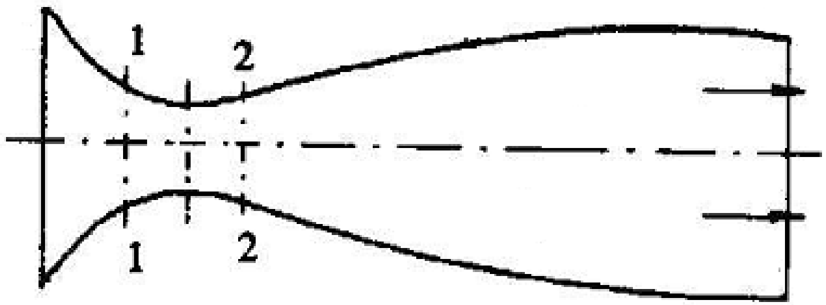
$$\tau_2 = \frac{T_2}{T_2^*} = \frac{T_2}{T_1^*} = 0.7839$$

查表，得 $\lambda_2 = 1.14, \pi(\lambda_2) = 0.4255$

再查表，得 $\pi(\lambda_1) = 0.8053$

$$p_2 = p_2^* \pi(\lambda_2)$$

$$= p_1 \frac{\pi(\lambda_2)}{\pi(\lambda_1)} = 3.11 \times 10^5 Pa$$



超声速喷管

2、流量函数

因为 $$m = \rho v A = \frac{\rho v}{\rho_{cr} v_{cr}} \rho_{cr} v_{cr} A$$

因为 $\rho v = m/A$ 是单位面积上的流量，称为密流；因此 $\rho v/\rho_{cr} v_{cr}$ 是无量纲密流，流量函数q就定义为这个无量纲密流：

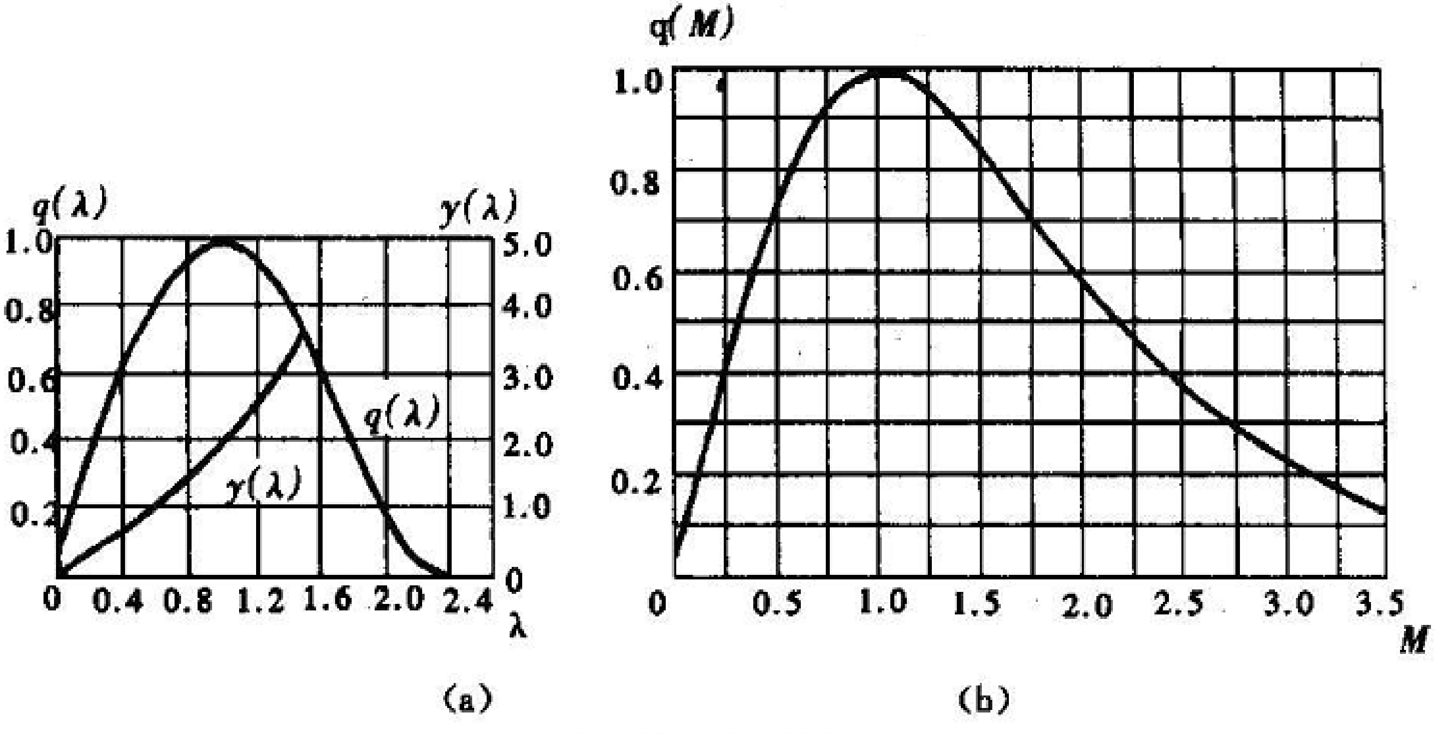
$$q(\lambda) = \frac{\rho v}{\rho_{cr} v_{cr}} = \lambda \frac{\rho}{\rho_{cr}} = \lambda \frac{\rho/\rho^*}{\rho_{cr}/\rho^*}$$

$$= \lambda \left[\frac{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}} \right]^{\frac{1}{k-1}} = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

或者用M数表示，为：

$$q(M)=M\left[\frac{2}{k+1}\left(1+\frac{k-1}{2}M^{2}\right)\right]^{-\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

从图中可见，流量函数在λ<1(同样M<1)时是递增的；而在λ>1(同样M>1)时是递减的；而在λ=1(同样M=1)时达到最大值。



流量函数q的函数曲线

通过流量函数，可以把质量流量表示为：

$$\dot{m}=\rho_{cr}v_{cr}A\cdot q(M)=\rho^{*}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}\sqrt{\frac{2k}{k+1}RT^{*}}\cdot Aq(M)$$

进一步，可简化为

$$\dot{m}=\sqrt{\frac{k}{R}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}\cdot\frac{p^{*}}{\sqrt{T^{*}}}Aq(M)$$

令 $K=\sqrt{\frac{k}{R}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}$ 得

$$\dot{m}=K\frac{p^{*}}{\sqrt{T^{*}}}Aq(M)$$

对于空气，k=1.4,R=287.06J/(kg.k)，有K=0.04042 $s\sqrt{K}/m$

上面的公式是气动分析中一个非常重要的公式。因为对于绝能等熵流动，总温总压不变，所以连续方程可以简化为关于$Aq(\lambda)$=常数。这样可以得到下面的结论。

①对于亚音速气流，λ增加时$q(\lambda)$也增加。这说明亚音速流中，气流加速时管截面必定是减小的。

②对于超音速气流，λ增加时$q(\lambda)$却减小。这说明超音速流中，气流加速时管截面必定是增大的。

③当$\lambda=1$时，$q(\lambda)=1$，达到最大值，所对应的截面必定最大。

因此，要使亚音速流连续加速到超音速流，管截面必定是先收缩再扩张的，中间音速截面是最小的。

当知道的是静压而不是总压时，可采用另一个流量函数$y(\lambda)$：

$$y(\lambda)=\frac{q(\lambda)}{\pi(\lambda)}$$

此时，流量为：

$$m = K\frac{p}{\sqrt{T^*}}Ay(M)$$

[例4]扩张管流动如图所示，已知进出口面积比$A_2/A_1=2.5$，进口速度系数$\lambda_1=0.8$，求出口截面气流速度系数λ_2(假设流动是绝能等熵的)。

[解]因为流动是绝能等熵的，所以$Aq(\lambda)$=常数。

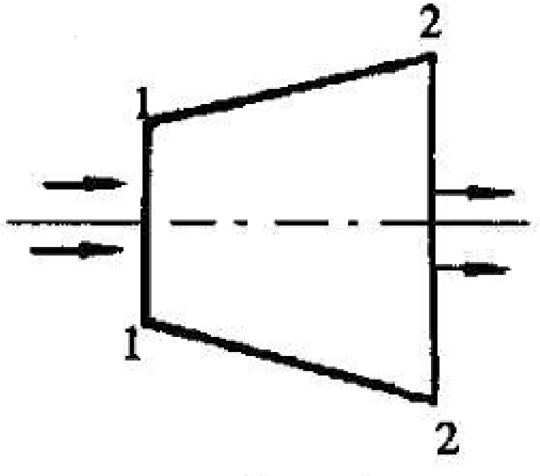
因此 $q(\lambda_2)=(A_1/A_2)q(\lambda_1)$

查k=1.4的气动函数表，得$\lambda_1=0.8$时$q(\lambda_1)=0.9518$。因此

$$q(\lambda_2)=0.9518/2.5=0.380$$

再查k=1.4的气动函数表，得$\lambda_2=0.8$和$\lambda_2=1.825$。

因为亚音流在扩张管内必定是减速运动，所以只能是亚音速解$\lambda_2=0.8$。



扩张管流动

3、冲量函数

下图的一维管道流动中，不计摩擦时，动量定理为：

$$F=\left(\dot{m}V_2+p_2A_2\right)-\left(\dot{m}V_1+p_1A_1\right)$$

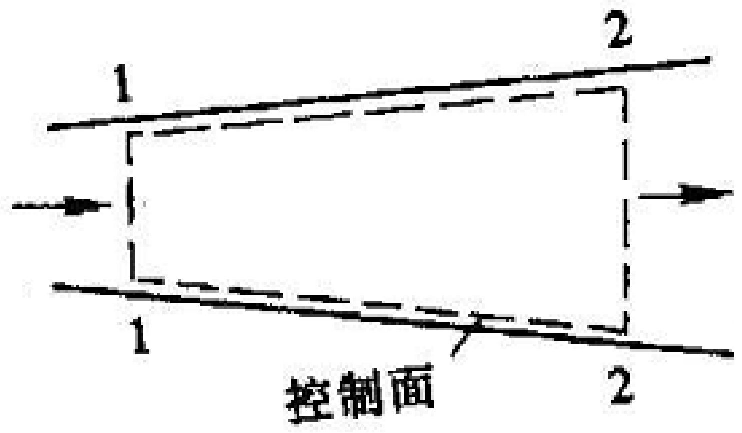
把上式中括号里的组合称为冲量。因此控制体内流体所受的力即为两截面上的冲量之差。

为计算冲量需要，定义三个冲量函数：

$$Z(\lambda)=\lambda+\frac{1}{\lambda}$$

$$f(\lambda)=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}q(\lambda)Z(\lambda)$$

$$r(\lambda)=\pi(\lambda)/f(\lambda)$$



一维管道流动

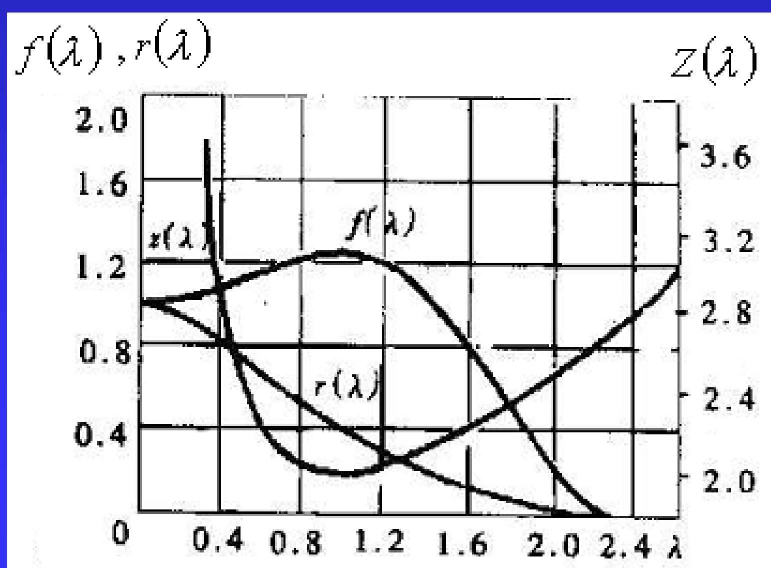
通过这三个函数，冲量分别可按下列各式计算：

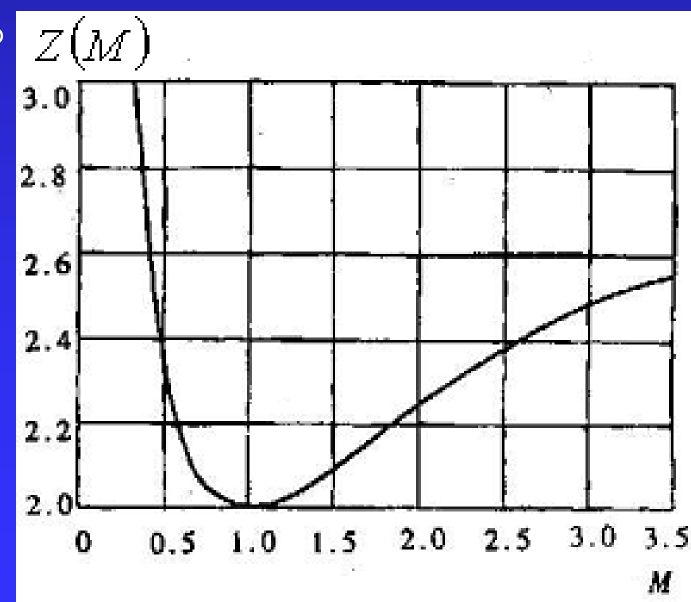
$$\dot{m}V + pA = \frac{k+1}{2k}\dot{m}c_{cr}Z(\lambda)$$

$$\dot{m}V + pA = p^{*}Af(\lambda)$$

$$\dot{m}V + pA = pA/r(\lambda)$$

可见，借助冲量函数，计算作用力非常容易。下面是冲量函数曲线分布。





冲量函数 Z、f、r 的曲线

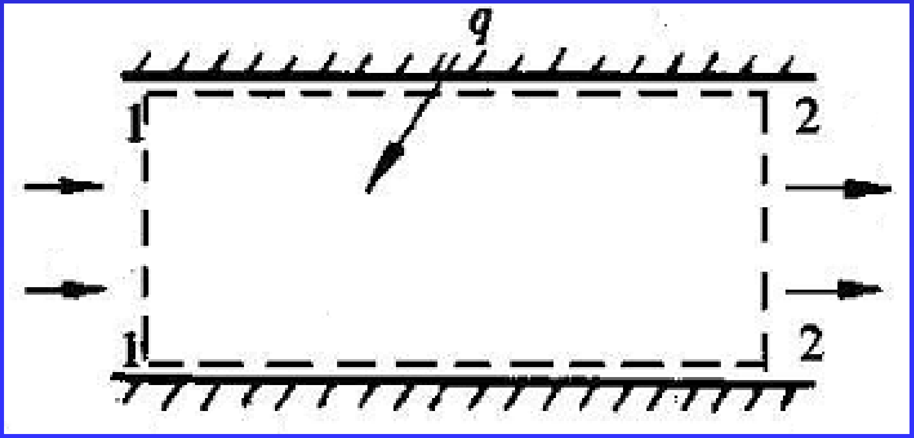
[例4]燃气(k=1.33)在直管中流动，进口参数为T_1^*=750K，$p_1^* = 2.55\times10^5$Pa，λ_1=0.35。已知在管内加入燃气的热量为q=1.17×10^5kJ/kg。不考虑管壁的摩擦力，求出口气流参数T_2^*、p_2^*和λ_2。(c_p=1.15kJ/(kg.K))

[解]取如图的控制体。根据加入热量，按能量方程：

$$q = c_p\left(T_2^* - T_1^*\right)$$

得T_2^*=1760K。又因为是不计摩擦的直管，所以管内流体所受的作用力为零，即F=0。按照动量定理，得：

$$c_{cr2}Z(\lambda_2) = c_{cr1}Z(\lambda_1)$$



得

$$Z(\lambda_2)=\frac{c_{cr2}}{c_{cr1}}Z(\lambda_1)=\sqrt{\frac{T_2^*}{T_1^*}}\cdot Z(\lambda_1)=2.10$$

查k=1.33的气动函数表，得 λ_2=0.73和 λ_2=1.73。因为进口是亚音速流，不可能在直管内加速到超音速，所以只能是亚音速流动，因此 λ_2=0.73。

根据

$$p_2^* A f(\lambda_2)=p_1^* A f(\lambda_1)$$

得到

$$p_2^*=p_1^* f(\lambda_1)/f(\lambda_2)=2.25\times10^5(Pa)$$

[例5]两股空气流混合，混合前的参数为T_1^*=300K，T_2^*=900K，p_1^*=p_2^*=1.962×10⁵Pa，流量$\dot{m}_1$=60kg/s，$\dot{m}_2$=40kg/s，已知$A_1=A_2=0.22m^2$，$A_3=A_1+A_2$。略去管壁与气流间的摩擦，并设气流与外界无热量交换，求混合后气流参数T_1^*、p_1^*和 λ_2。

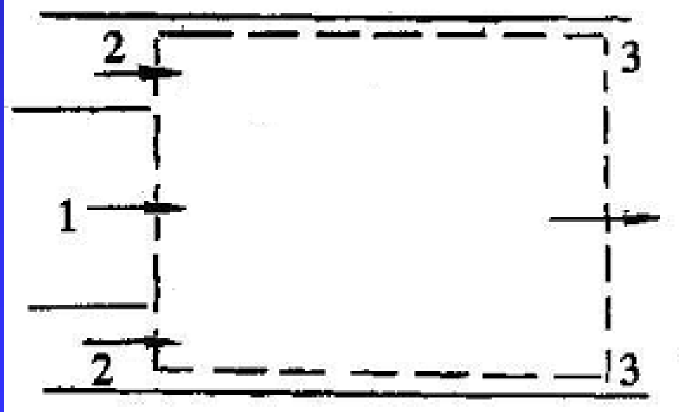
[解]取如图的控制体，由能量方程：

$$\dot{m}_1 c_p T_1^* + \dot{m}_2 c_p T_2^* = \dot{m}_3 c_p T_3^*$$

得 $T_3^* = \dfrac{\dot{m}_1}{\dot{m}_3} T_1^* + \dfrac{\dot{m}_2}{\dot{m}_3} T_2^* = 540K$

按 $q(\lambda) = \dfrac{\dot{m}\sqrt{T^*}}{Kp^* A}$ 分别求得

$q(\lambda_1) = 0.596$ $\quad$ $q(\lambda_2) = 0.687$



两股空气流的混合

查k=1.4的气动函数表，得 λ_1=0.405， λ_2=0.4805

控制体内的动量定理为：

$$\left(\dot{m}_1V_1+p_1A_1\right)+\left(\dot{m}_2V_2+p_2A_2\right)=\dot{m}_3V_3+p_3A_3$$

即 $$\dot{m}_1c_{cr1}Z\left(\lambda_1\right)+\dot{m}_2c_{cr2}Z\left(\lambda_2\right)=\dot{m}_3c_{cr3}Z\left(\lambda_3\right)$$

$$Z\left(\lambda_3\right)=\frac{\dot{m}_1}{\dot{m}_3}\frac{c_{cr1}}{c_{cr3}}Z\left(\lambda_1\right)+\frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_3}\frac{c_{cr2}}{c_{cr3}}Z\left(\lambda_2\right)=2.613$$

查表，得 λ_3=0.465。

再按流量，得到

$$p_3^*=\frac{\dot{m}_3\sqrt{T_3^*}}{KA_3q\left(\lambda_3\right)}=\frac{100\times\sqrt{540}}{0.04042\times1.1096q\left(0.465\right)}=1.945\times10^5\left(Pa\right)$$

作业

p202-203

Ex.9-7

Ex.9-8

Ex.9-10