第二章 流体静力学

◎所谓静止流体,是指对选定的坐标系没有相对运动的流体。

◎内容

◎意义

§2.1作用在流体上的力

1、质量力——是指作用在流体内部每个流体质点上的力，其大小与流体质量有关。如重力、惯性力等。常用单位质量的质量力来衡量。

特点：作用在整个流体体积上；和质量（或密度）有关。

作用在体积V上的总体积力为：

$$\vec{F} = \int_V \rho \vec{f}\, dV$$

2、表面力——一个流体体积的表面上，受到其他部分的流体或与之相接的固体的作用力。这种力，只是作用在体积的表面上而没有作用到体积内部的流体质点上。

通常可以把表面力分解为法向的和切向的分量，分别称为法向力和切向力。单位面积上则称为法向应力和切应力。

表面力特点：

◎跟作用面有关。

◎对静止流体，只有沿表面法向的表面力而无切向力。因此，静止流体中的表面力就只有沿受力面垂直方向的压力。

◎作用在表面S上的总表面力为

$$\vec{F} = \int_S [\tau] \cdot d\vec{S}$$

对于静止流体，是不能有切应力的，流体表面的压强与法向应力是大小相等，方向相反的。工程上也简称为压力。

作用在面积S上的总压力为

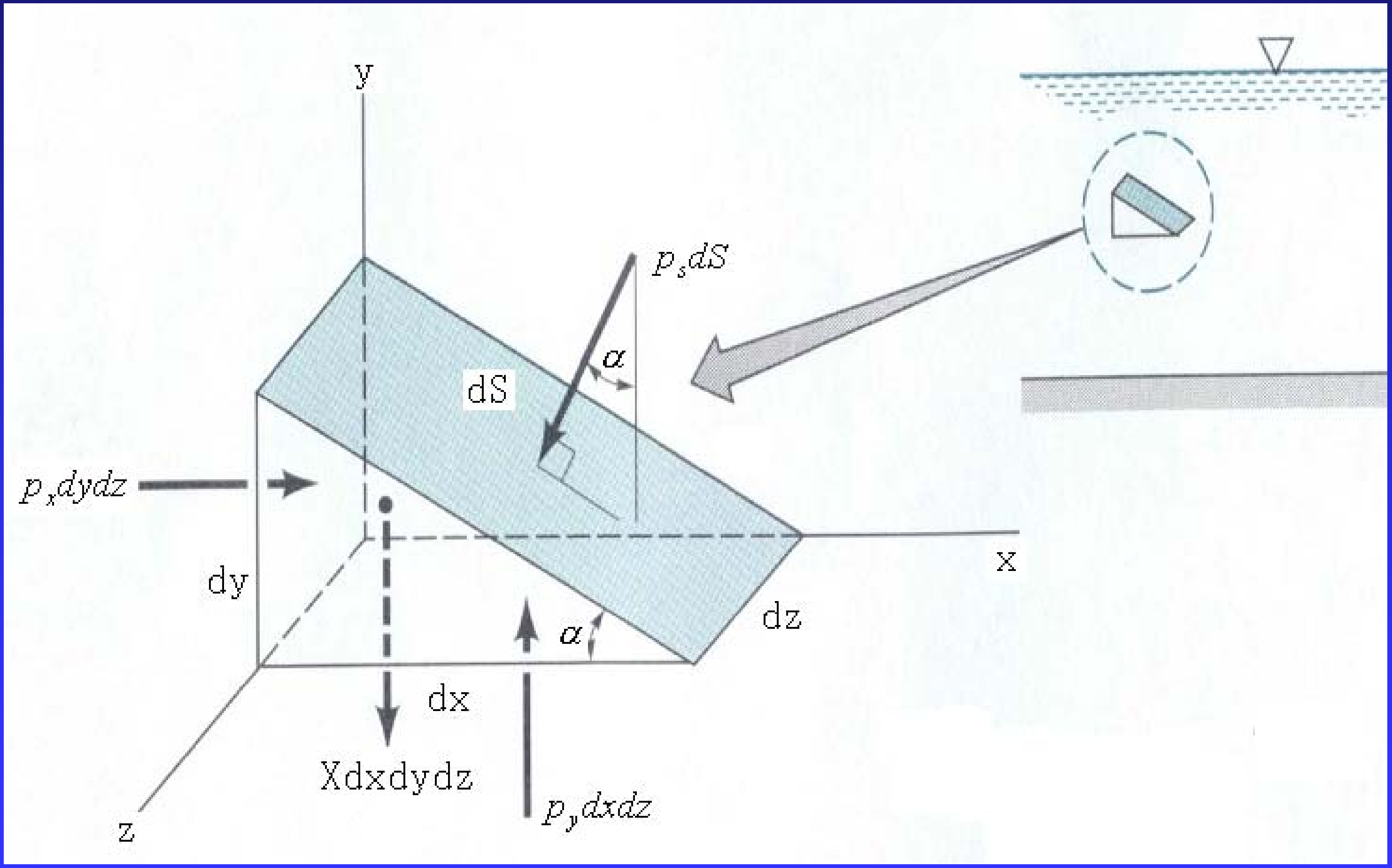
$$\vec{F} = \int_S p\, d\vec{S} = \int_S p\vec{n}\, dS$$

3、流体静压强特性

通常，压强的大小跟受力面的位置（或说方向）有关。

但是对于静止流体，在一个具体的空间位置上，静压强的大小仅仅跟这个位置有关，而跟受力面的位置或方向没有关系。也就是说，在那个位置上，任一个受力面上在该点所受的压强的大小是一样的。

- [证明]取如图微元四面体，认为作用在各个面上的压强是均匀分布的。这样作用在四个面上的表面力分别如图。



y方向上的力平衡：

$$p_y dxdz - p_S dS\sin\alpha + Xdxdydz = 0$$

其中，α 是S面上压强与y方向上的夹角。由于

$$dS\sin\alpha = dxdz$$

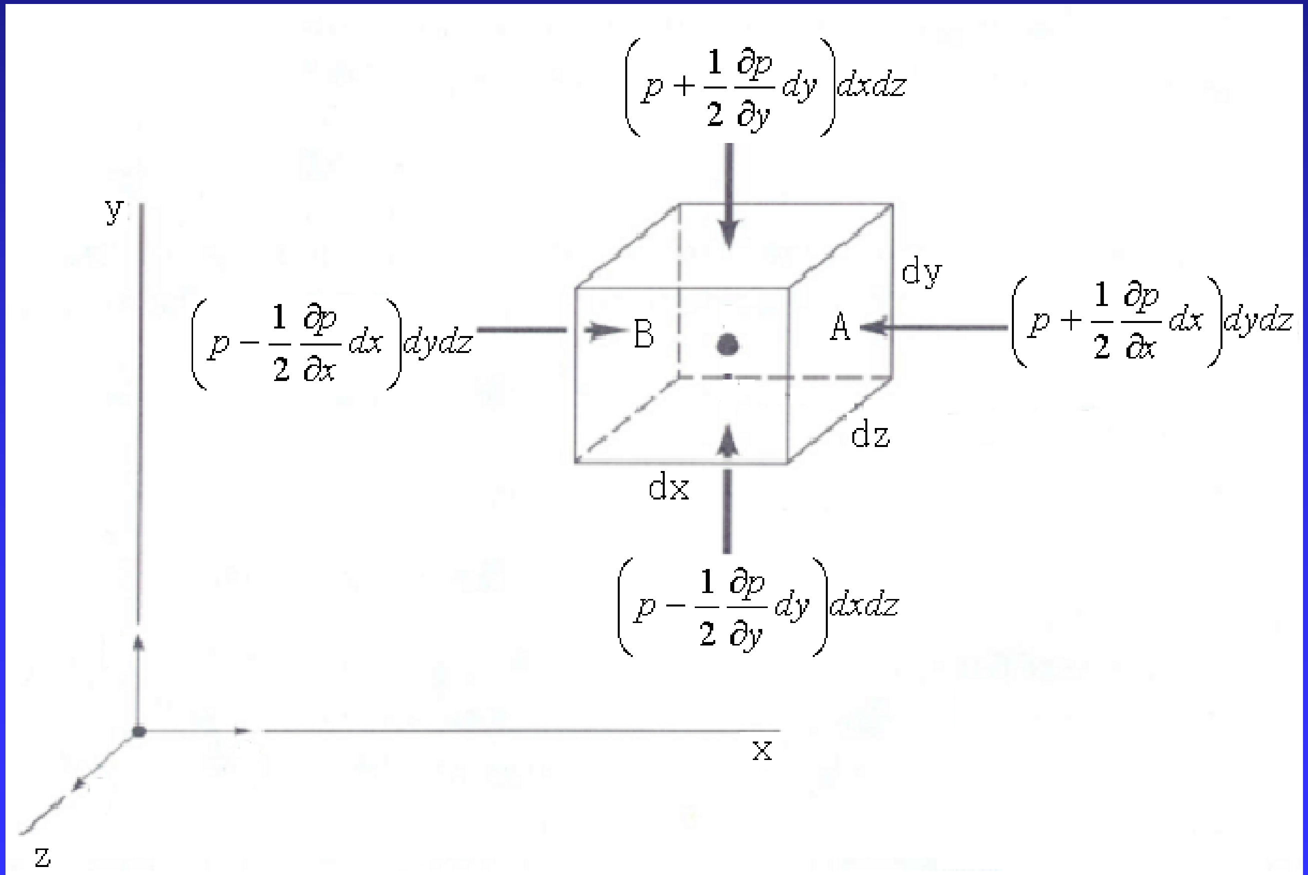
因此 $p_y - p_S + Xdy = 0$

当四面体向A点收缩时，$dy \to 0,$ $p_y = p_S$

同理 $p_x = p_z = p_S$

§2.2静力学基本方程（Euler静平衡方程）：

取一个矩形微元六面体，其六个面分别与坐标轴平行，设微元中心处的压强为p。由于这是个微小体积，因此认为六个面上的压强各自均匀分布，常用面上中心来做代表。



- 而面上中心处的压强又可以围绕六面体中心做Taylor展开。展开式忽略二阶以上的高阶量，有

$$p_A = p\left(x + \frac{1}{2}dx\right)$$

$$p_A = p + 0.5(\partial p / \partial x)dx$$

$$p_B = p - 0.5(\partial p / \partial x)dx$$

- 这样，垂直于x轴的两个面上的表面力分别为

$$\left[p + 0.5\left(\partial p / \partial x\right)dx\right]dydz$$

$$\left[p - 0.5\left(\partial p / \partial x\right)dx\right]dydz$$

- 假设作用在此微元体上的质量力为X、Y、Z，流体密度为ρ，则此微元体上沿x方向上的质量力为

$$\rho X dxdydz$$

- 因为流体处于静止，所以合力为零。各分量也为零，故x方向上的力平衡为

$$\left[p-0.5\left(\partial p/\partial x\right)dx\right]dydz$$

$$-\left[p+0.5\left(\partial p/\partial x\right)dx\right]dydz$$

$$+\rho Xdxdydz=0$$

化简，得

$$\rho X-\frac{\partial p}{\partial x}=0$$

同理

$$\rho Y-\frac{\partial p}{\partial y}=0 \qquad \rho Z-\frac{\partial p}{\partial z}=0$$

- 这就是流体静力学中最基本的方程——Euler方程。

$$\rho \vec{F} - \nabla p = 0$$

- 静止流场的基本特性

（1）对不可压缩静止流体，质量力必须有势。

$$\rho\left(Xdx+Ydy+Zdz\right)=\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz=dp$$

右边既然是全微分，左边也必定为全微分。令其为dU。

$$X=\frac{\partial U}{\partial x},Y=\frac{\partial U}{\partial y},Z=\frac{\partial U}{\partial z}$$

这个关系式表明，质量力有势，势函数就是U。

再根据势函数的物理意义，有

（a）静止流体的质量力是保守力（守恒力）；

（b）此势函数正是质量力的势能（位能）

（c）在空间中质量力沿一条封闭曲线的积分为零，这个式子写成场论的形式，就是

$$\nabla \times \vec{F} = 0$$

此式子也是流体静止的必要条件。

（2）等压面就是等势面，并且这些面均与质量力垂直。

所谓等压面，就是由静压强相等的点所组成的面。对静止流体，在等压面上，p为常数，则dU=0，U为常数。由此等压面就是等势面。

另外，由 $\rho\vec{F} - \nabla p = 0$

即 $\vec{F} // \nabla p$ 而 ∇p 垂直于等压面。

（3）有势质量力的静止流体的分界面上，既是等压面也是等势面。

[证明]分界面上任意两点1，2

$$\nabla U_1 = \frac{1}{\rho_1}\nabla p_1 \qquad \nabla U_2 = \frac{1}{\rho_2}\nabla p_2$$

每种流体在分界面上，均是等压和等势的，因此1，2两点的压力差和势差也相等。

当$\rho_1 \neq \rho_2$时，只能 $\nabla U = \nabla p = 0$，因此分界面上，既是等压面也是等势面。

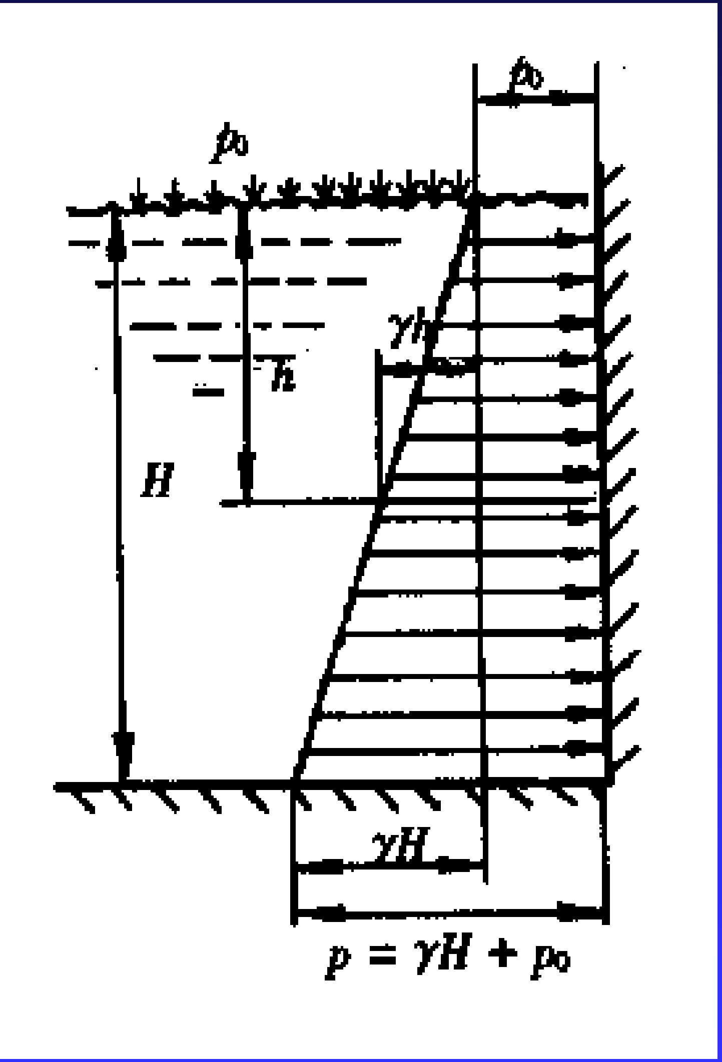
§2.3重力作用下静止流体内部的压强分布

[均匀液体的压强分布]

根据Euler静平衡方程

可以得到：

$$p = p_0 + \gamma h$$



第一部分是自由面上的压强，第二部分称为剩余压强。

$$p = p_0 + \gamma h = \gamma\left(p_0/\gamma + h\right)$$

这种做法，称为虚水面方法。

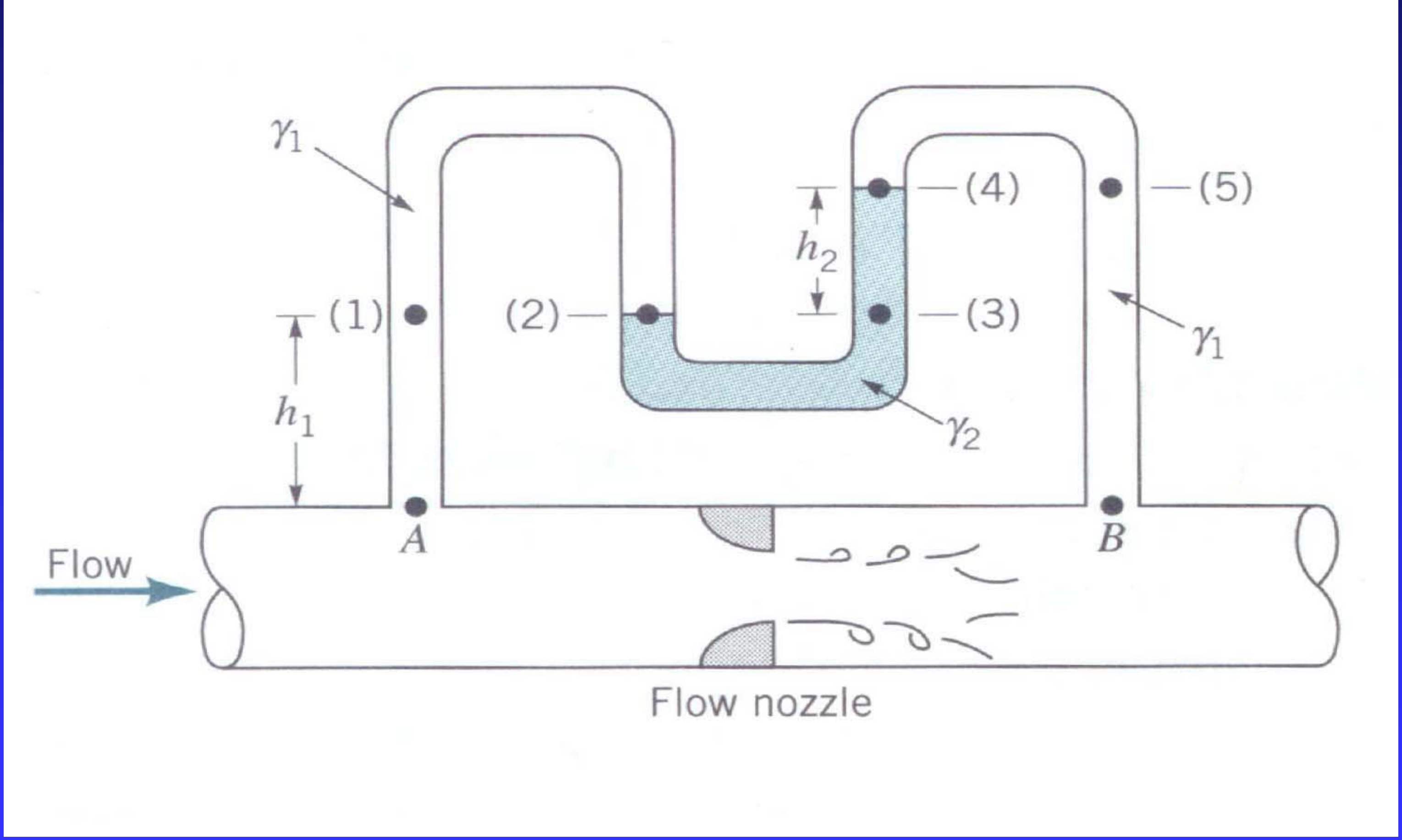
[连通器]

（1）同种液体，表面自由压强相等。则两液面等高，任一等高度的面上均为等压面。

（2）同种液体，但表面自由压强不等。则自由压强大者，液面低。

（3）不同液体（不相混）。密度大者液面低。

[例]下图，A、B两点的压强差等于多少？



[气体]

（1）等温状态下的气体平衡

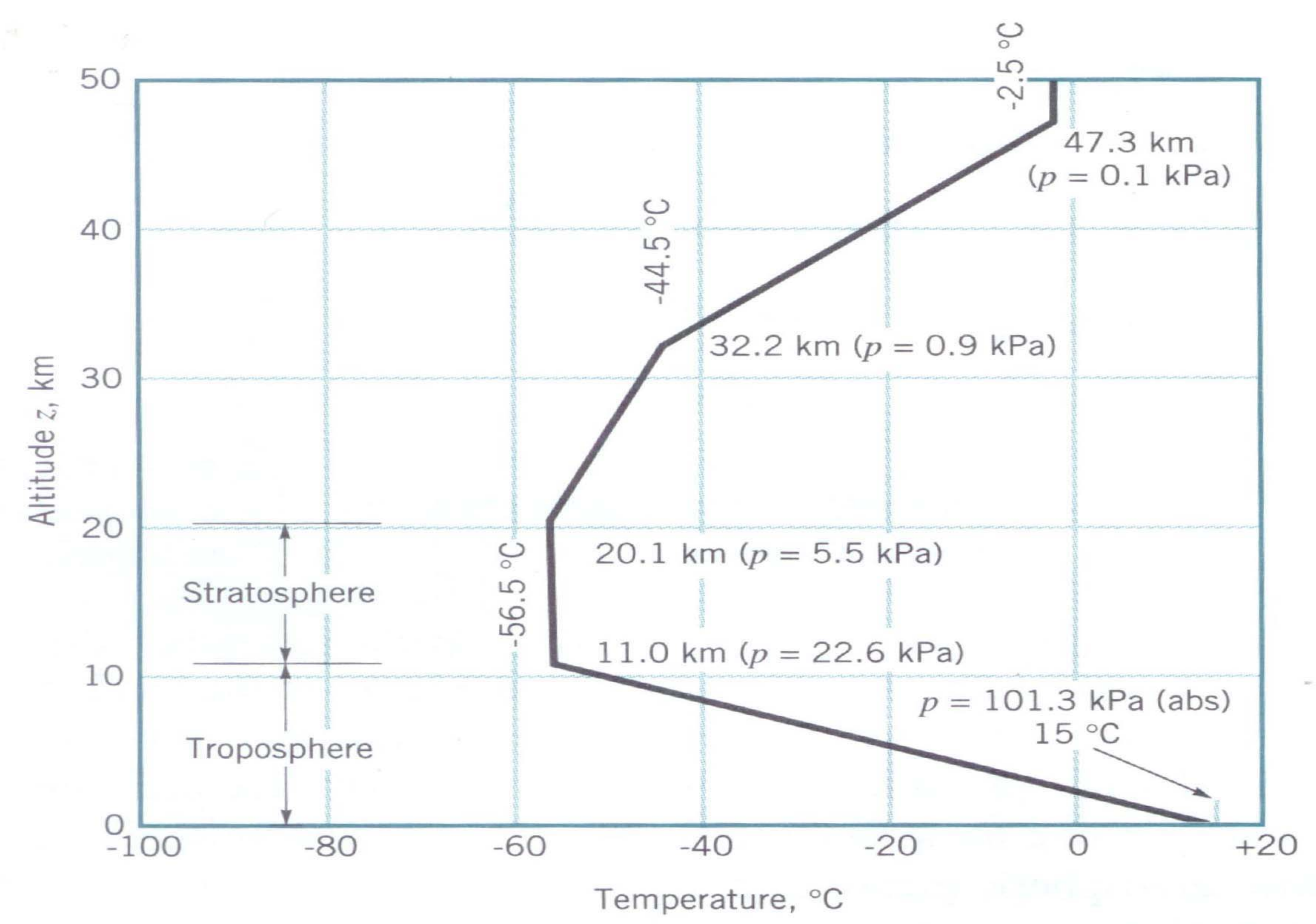
由状态方程和等温条件，可以积分静力学基本方程。

（2）国际标准大气

$$T=\begin{cases}T_0-0.0065H, & H=0\sim 11000m\rightarrow \text{对流层}\\ 216.7, & H=11000\sim 24000m\rightarrow \text{同温层}\end{cases}$$

压强分布——

$$p=\begin{cases}p_0\left(1-\dfrac{0.0065H}{T_0}\right)^{\frac{g}{0.0065R}}, troposphere\\ p_{11km}e^{-\frac{g}{216.7}(H-11000)}, stratosphere\end{cases}$$


-2.5 °C
47.3 km
(p = 0.1 kPa)
-44.5 °C
32.2 km (p = 0.9 kPa)
20.1 km (p = 5.5 kPa)
-56.5 °C
11.0 km (p = 22.6 kPa)
p = 101.3 kPa (abs)
15 °C
Stratosphere
Troposphere
Altitude z, km
50
40
30
20
10
0
-100
-80
-60
-40
-20
0
+20
Temperature, °C

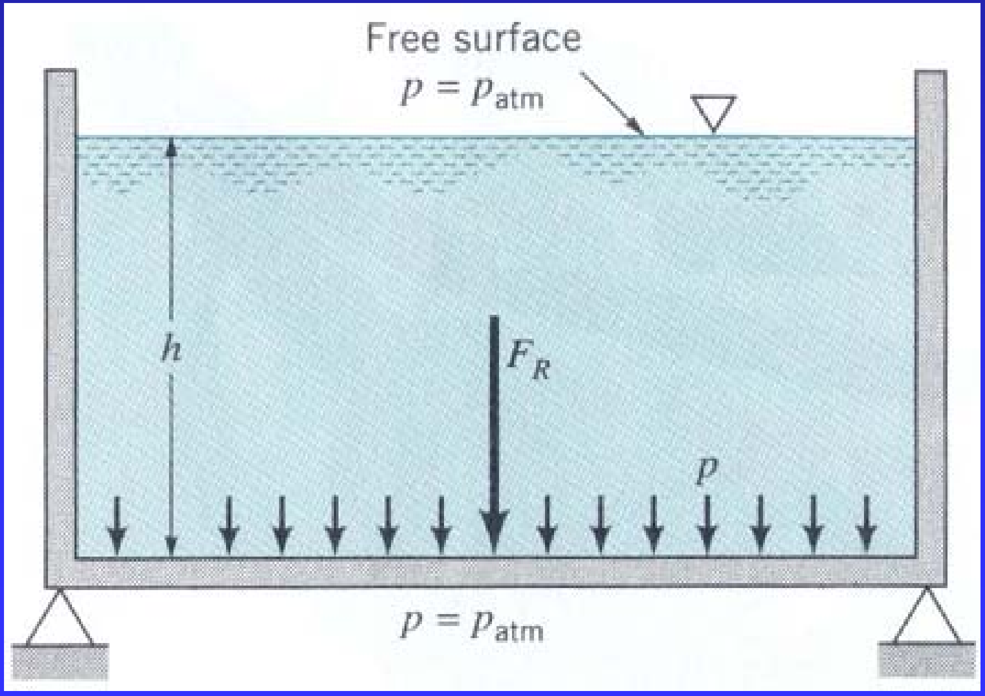
地球大气分布

§ 2.4 流体对平面固壁的作用力

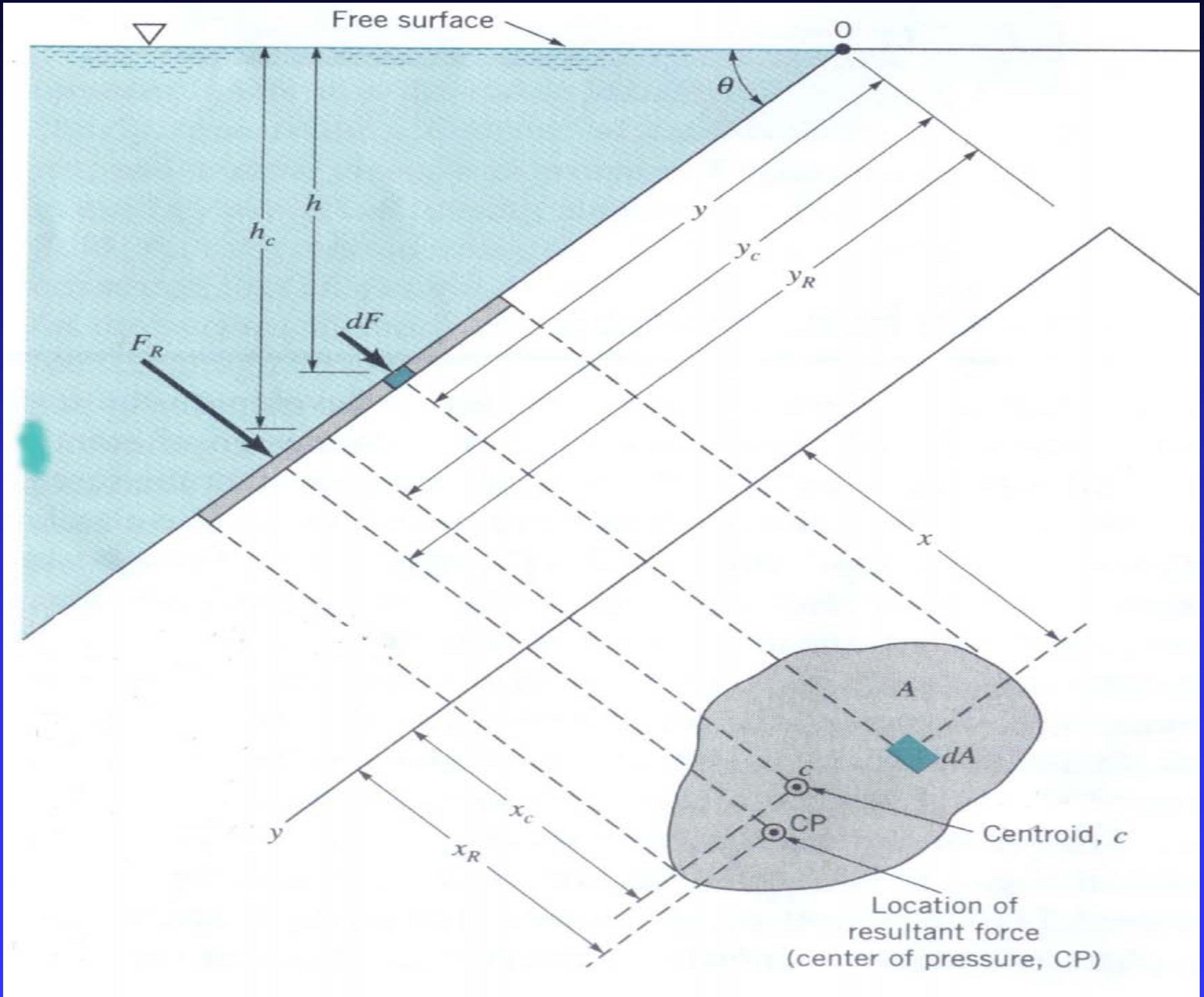
[1]对静止流体，作用力必须垂直于表面，因为没有剪切力存在。

[2] 水平面上的压力合力

$$F_R = \int_A p dA = p\int_A dA = pA$$



[3]一般情况下，流体对平面壁的作用力



[3]一般情况下，

$$dF_R = p\,dA = (p_0 + \gamma h)\,dA = (p_0 + \gamma y\sin\theta)\,dA$$

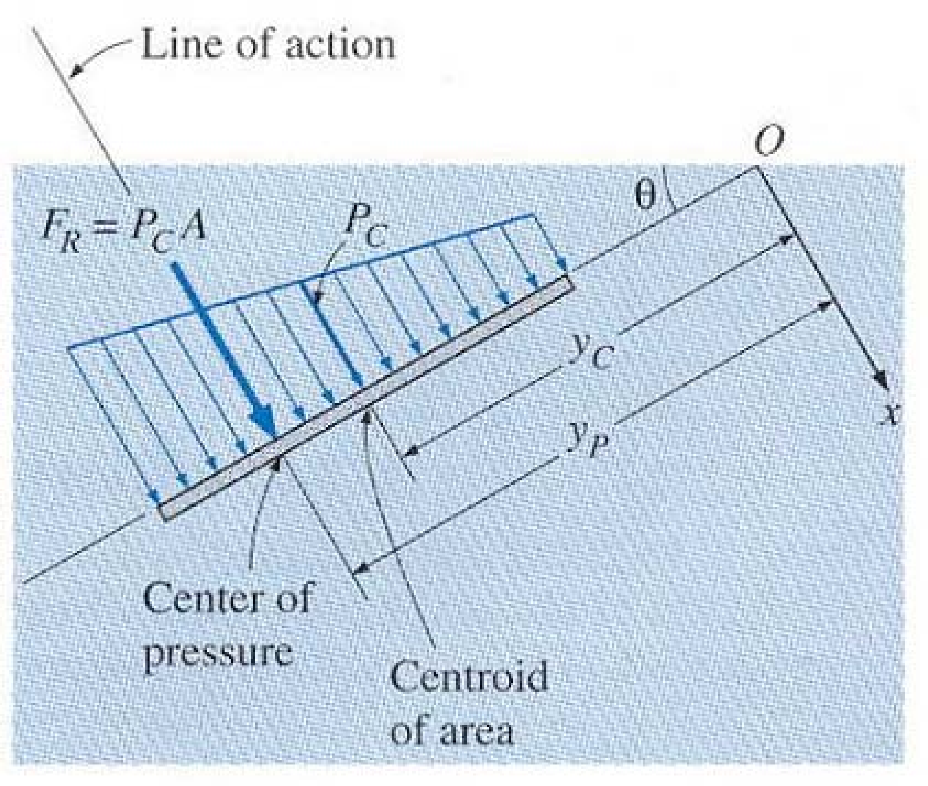
$$F_R = \int_A p\,dA = \int_A (p_0 + \gamma h)\,dA$$

$$= p_0 A + \gamma \int_A y\sin\theta\,dA$$

$$= p_0 A + \gamma A \sin\theta \left(\int_A y\,dA \Big/ A \right)$$

$$= p_0 A + \gamma A y_c \sin\theta$$

$$= (p_0 + \gamma y_c \sin\theta) A = p_c A$$

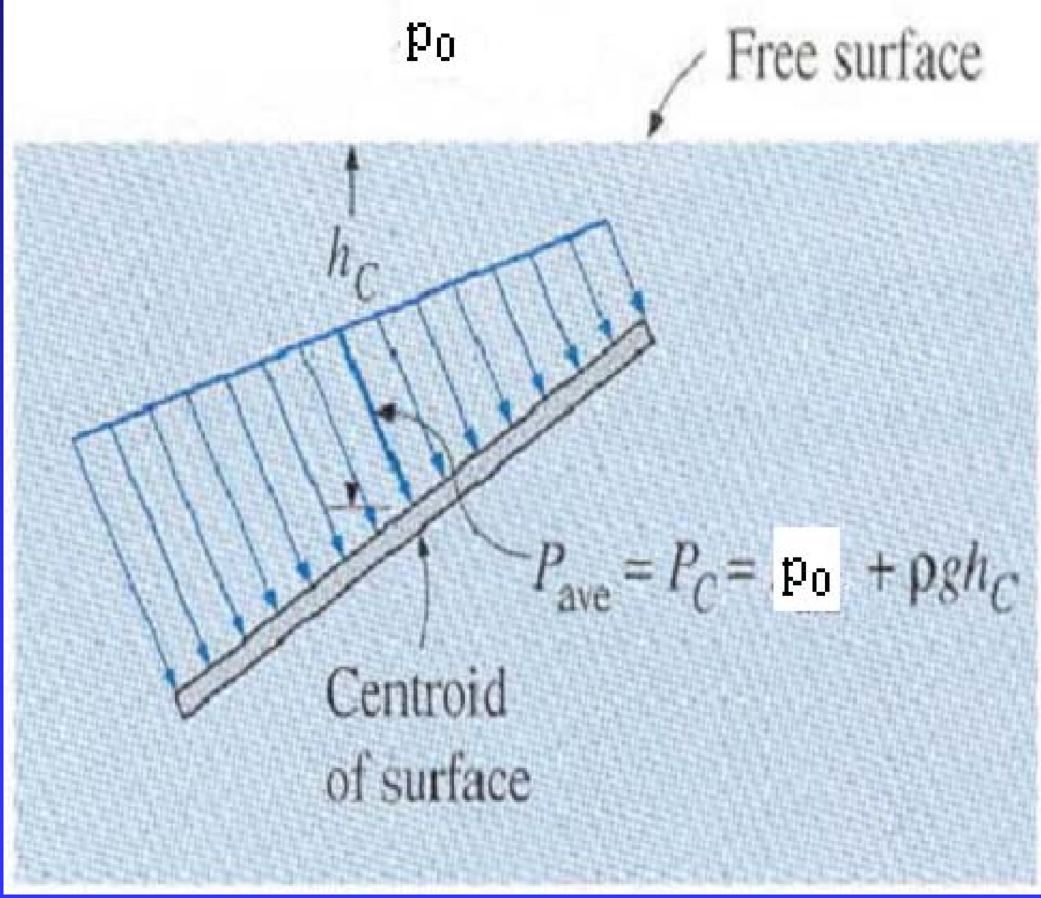


- *因此，作用在一个浸没面上的合力是*

$$\boxed{F_R = (p_0 + \rho g y_C \sin\theta)A = p_C A}$$

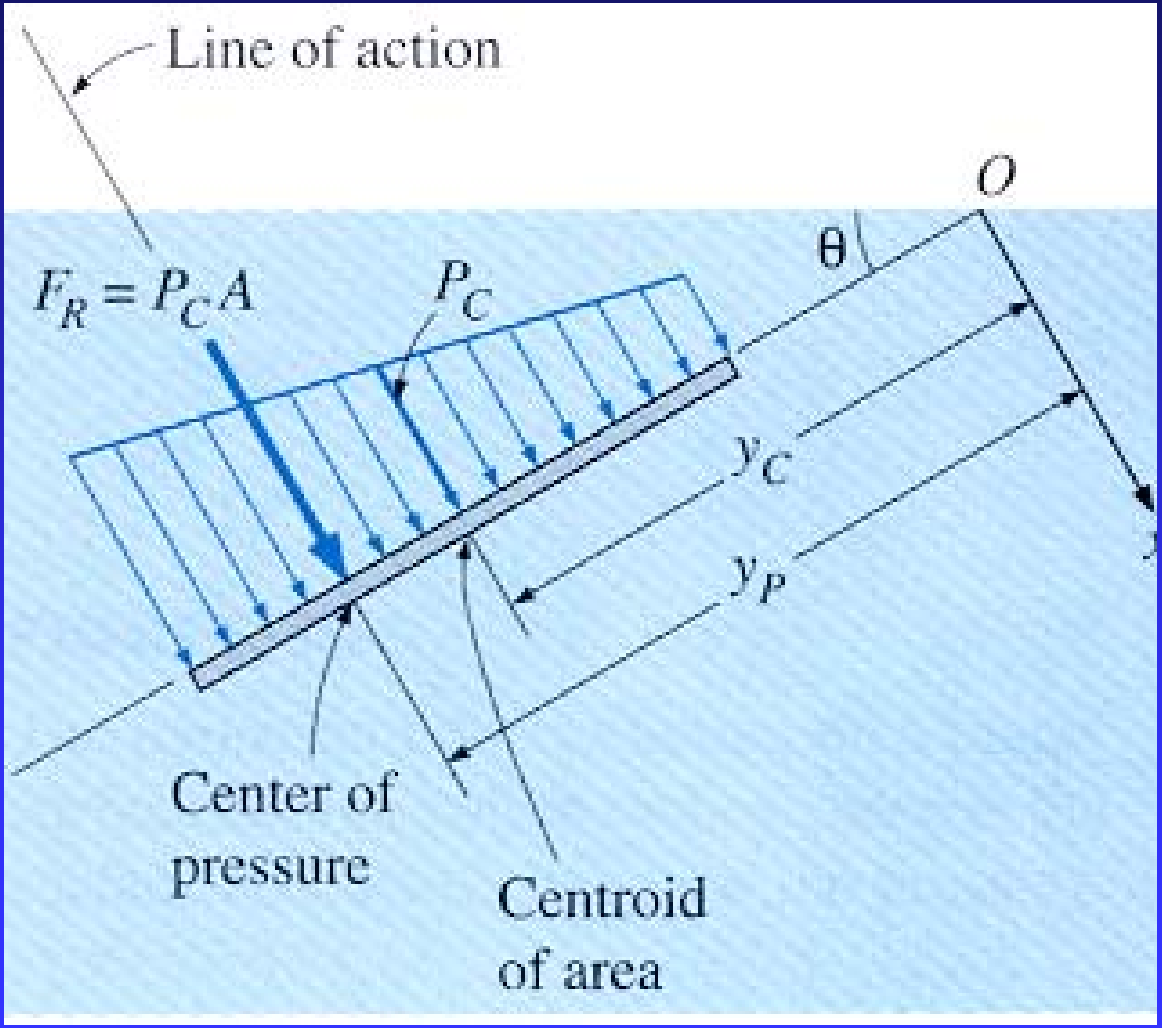
这里 y_c是面中心的y-坐标。

上面式子说明了，作用在平板面上的总合力等于液体作用在形心上的压强乘以平板的面积。方向为垂直地指向板面。



[4]合力的作用点

- 一般情况下，压力中心y_P的位置低于面中心的位置 y_C，这是因为压力随深度而增加。



- *合力* F_R *对x轴的力矩与分布压强的作用力对x轴的合力矩应该相等：*

$$
\begin{aligned}
y_P F_R &= \int y p \, dA = \int y(p_0 + \rho g y \sin\theta) dA \\
&= p_0 \int y \, dA + \rho g \sin\theta \int y^2 dA \\
&= p_0 y_C A + \rho g \sin\theta \, J_X
\end{aligned}
$$

- *这里* $J_X = \int y^2 dA$ *是面积的二阶矩.*

- 大多数惯性矩是按照形心来给定的 (J_C).
- 它们与关于X轴的惯性矩 J_X 的关系是通过平行移轴定理给出的：

$$\boxed{J_X = J_C + y_C^2 A}$$

课本上给出了一些常见面积的惯性矩和形心位置。

- 把力矩转换关系代入合力作用点公式：

$$y_P=\frac{p_0 y_C A+\gamma\sin\theta\left(J_C+y_C^2 A\right)}{\left(p_0+\gamma y_C\sin\theta\right)A}=y_C+\frac{J_C\gamma\sin\theta}{\left(p_0+\gamma y_C\sin\theta\right)A}$$

- 如果不考虑液面的压强，则上式成为

$$y_P=y_C+\frac{J_C}{y_C A}$$

或

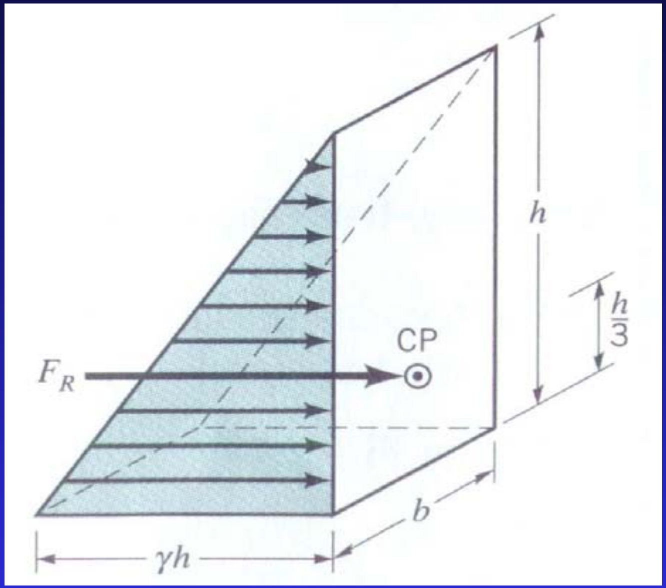
$$h_P=h_C+\frac{J_C\sin\theta}{y_C A}$$

[4]压力棱柱

$$F_R = p_{平均}A = \gamma(\frac{h}{2})A$$

$$F_R = 压力棱柱的体积$$

$$= \frac{1}{2}(\gamma h)(bh) = \frac{h}{2}\gamma A$$



不管压力棱柱的形状如何, 压强合力的大小都等于压力棱柱的体积，并且通过该体积的中心。

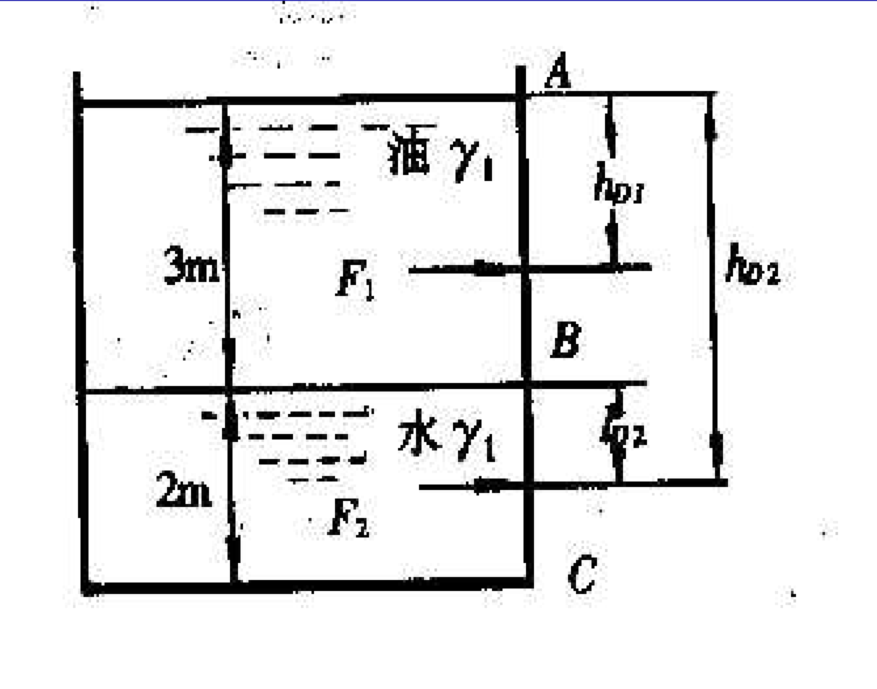
[例1]如图所示的容器中装有水和油,油的重度为7848N/m^3.容器侧面为矩形,宽 1.2m,求作用在侧面ABC上的合力和合力作用点.

[解]首先不考虑大气压的影响.

其次,作用在ABC上的力可由AB和BC两段所受的力合成.

AB面上的作用力为

$$F_1 = \gamma_1 h_{C1} A_1 = 42379.2N$$



BC面上的作用力为

$$F_2 = p_{C2}A_2 = \left(3\gamma_1 + \gamma_2\right)A_2 = 80049.6N$$

总合力为 $F = F_1 + F_2 = 122428.8N$

合力的作用点可先行计算每段的作用点,再使用平行力系的合成.

$$h_{D1}F_1 = \int_{AB} phdA = \int_{AB} \gamma_1 h^2 d\left(1.2h\right) = 84758.4$$

$$h_{D1} = \frac{h_{D1}F_1}{F_1} = 2m$$

同样,对BC面,

$$l_{D2}F_2 = \int_{BC} phdA = \int_{BC} (3\gamma_1 + \gamma_2 h)hd(1.2h) = 87897.6$$

$$l_{D2} = \frac{l_{D2}F_2}{F_2} = 1.098m$$

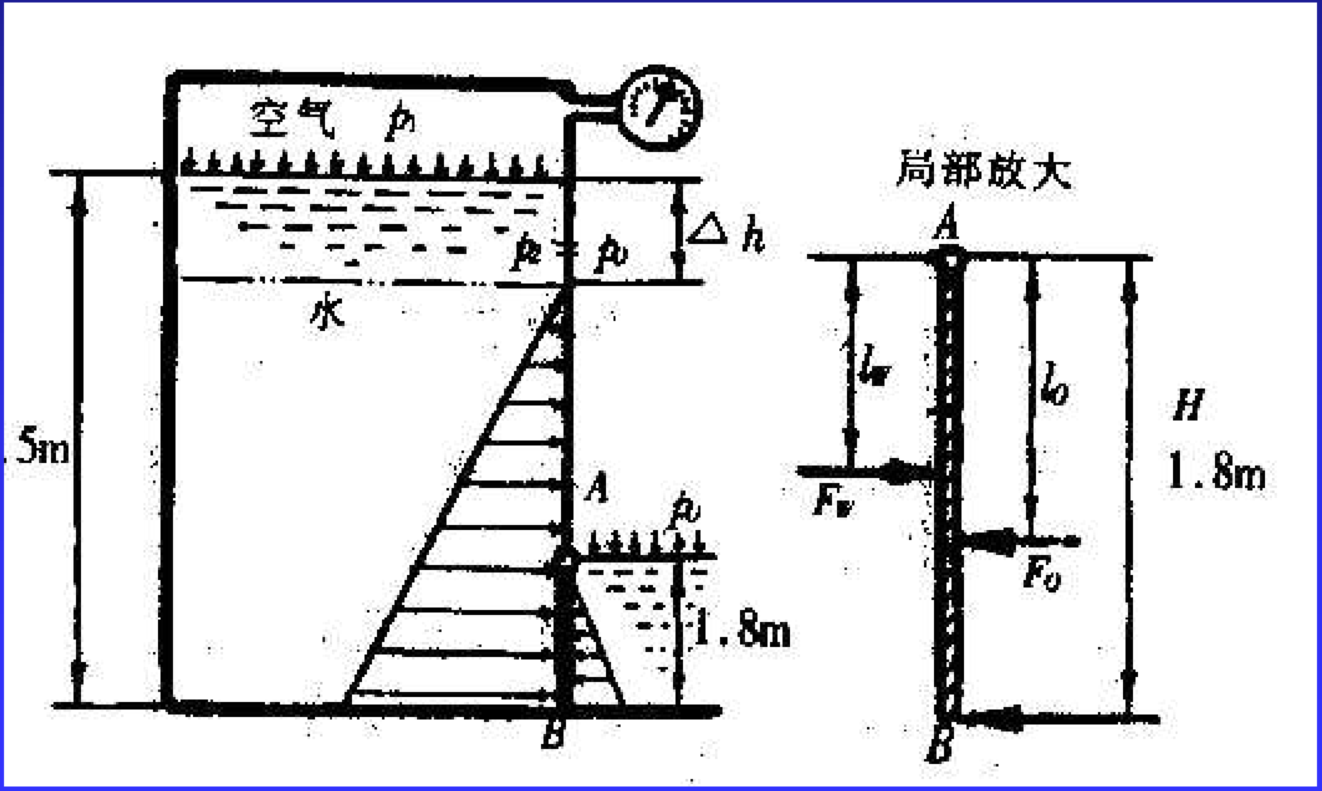
BC面作用力点距离水面的深度

$$h_{D2} = 3 + l_{D2} = 4.098m$$

因此,合力的作用点为

$$h_D = \frac{h_{D1}F_1 + h_{D2}F_2}{F_1 + F_2} \approx 3.372m$$

[例2]图示的密闭水箱,水面上为空气,压力表读数为负0.147bar,右测油箱中装着比重为0.75的油.为使闸门AB保持如图所示的平衡状态,必须在B点施加多大的力?(已知闸门AB宽1.2m,A点为铰链)



[解]本题的特点是水箱中的压力不是环境压力,这样计算会有麻烦.此时常用的技巧是设置虚水面.

所谓虚水面,是指把实际的液面高度改变,使得液面上的自由压力与环境压力一致,这样可以不再考虑自由面压力的影响.

现在水箱上方的绝对压力是

$$p_1 = p_0 - 0.147bar$$

在虚水面上,压力将与环境压力一致,因此

$$\Delta h = \frac{p_0 - p_1}{\gamma} = 1.5m$$

有了虚水面,可以不管自由面压力,来计算左右两测的合力及合力作用点.

左侧:

作用力 $F_w = \gamma_w h_{Cw} A$

作用点

$$l_w = h_{Cw} + \frac{J_C}{h_{Cw} A} - h = (2.2 + 0.9 - 2.2) + \frac{1.8^2}{6(4.4 + 1.8)} = 0.987m$$

右侧

作用力 $F_o = \gamma_o h_{Co} A$

作用点 $l_o = h_{Co} + \frac{J_C}{h_{Co} A} = 0.9 + \frac{1.8^2}{12 \times 0.9} = 1.2m$

从而,由 $F_B H = F_w l_w - F_o l_o$

得,F_B=26.484kN.

§2.5流体对曲面的作用力

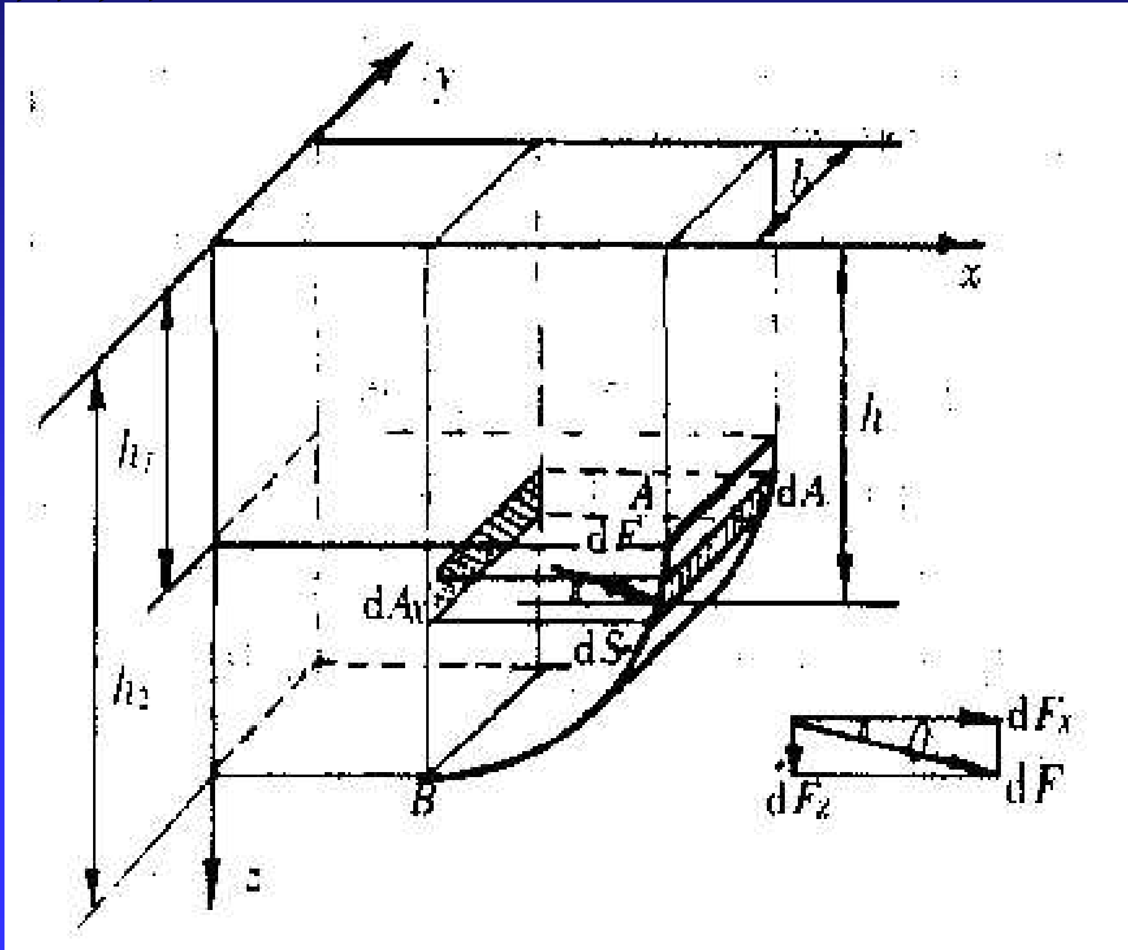
- 要点1：要把作用力分解成沿坐标轴方向的分量来求；
- 要点2：弄清楚压力体的概念；特别是虚压力体；
- 要点3：压力体的分解计算。
- 要点4：合力的作用点有时不存在。

水平分量的计算方法

任意曲面将有三个分量，现在我们选取一个特殊的二维曲面，这样问题成为只有一个水平分力。

曲面上一个微元面dA上的力dF为

$$dF = (p_0 + \gamma h)dA$$



把该力分解成水平和垂直方向上的分力dF_x、 dF_Z：

$$dF_x = dF\cos\theta, \quad dF_z = dF\sin\theta$$

θ 是微元面积dA的法向方向与水平方向的夹角，由于$dA_x = dA\cos\theta$

而dA_x是微元面积dA在垂直平面上的投影，所以曲面AB上所受的总水平分力是

$$F_x = \int_{AB} dF_x = \int_{AB} (p_0 + \gamma h) dA_x = p_0 A_x + \gamma \int_{AB} h dA_x$$

$$= p_0 A_x + \gamma A_x h_C = (p_0 + \gamma h_C) A_x$$

对垂直分力：

$$F_z = \int_{AB} dF_z = \int_{AB} (p_0 + \gamma h) dA_z = p_0 A_z + \gamma \int_{AB} h dA_z$$

积分 $\int_{AB} h dA_z$ 表示曲面AB上方的液柱体积

即，压力体 $V_{AB} = \int_{AB} h dA_z$

因此，$F_z = p_0 A_z + \gamma V_{AB}$

[总结]

1、作用在曲面上的水平分力，等于该曲面在垂直平面内的投影面积A_x乘以A_x的面积中心出的压强；

2、作用在曲面上的垂直分力，等于该曲面在水平投影面A_z上方的自由压力与鸭梨体内的液体重量。

[说明]

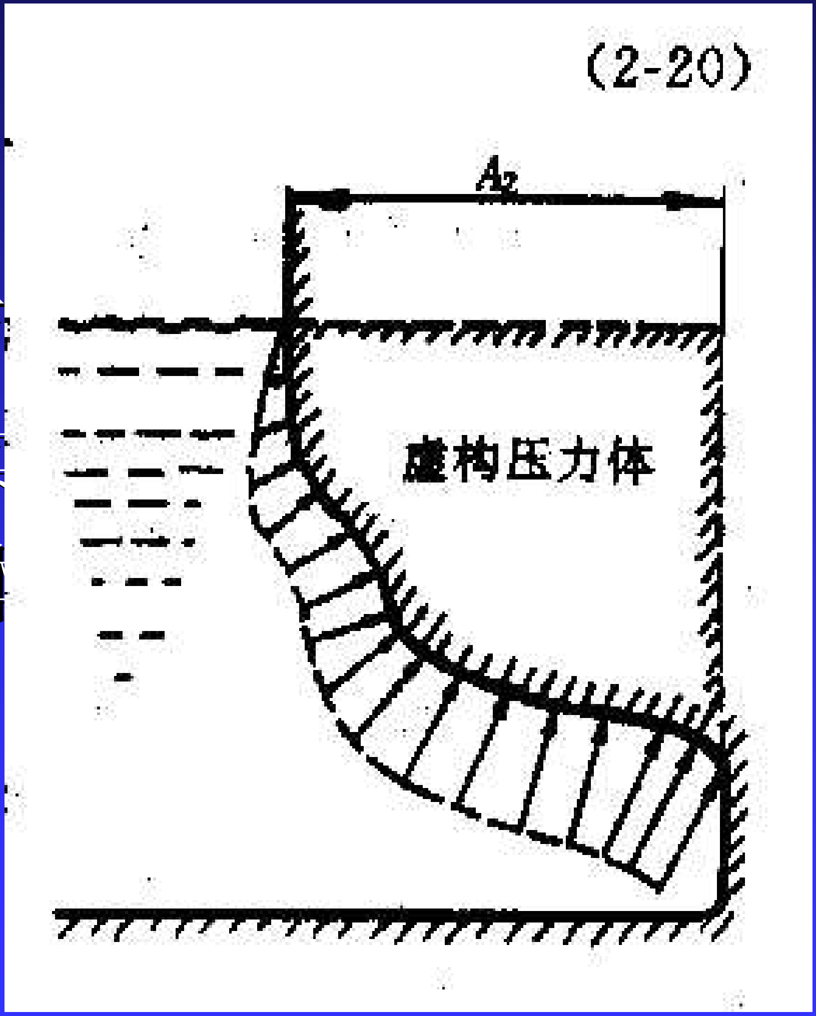
1、虚压力体

2、浸没在液体中曲面

受力计算时，对真实

压力体和虚拟压力体

的划分。



[例1]——p23，[例2-4]

§ 2.6 流体的相对平衡

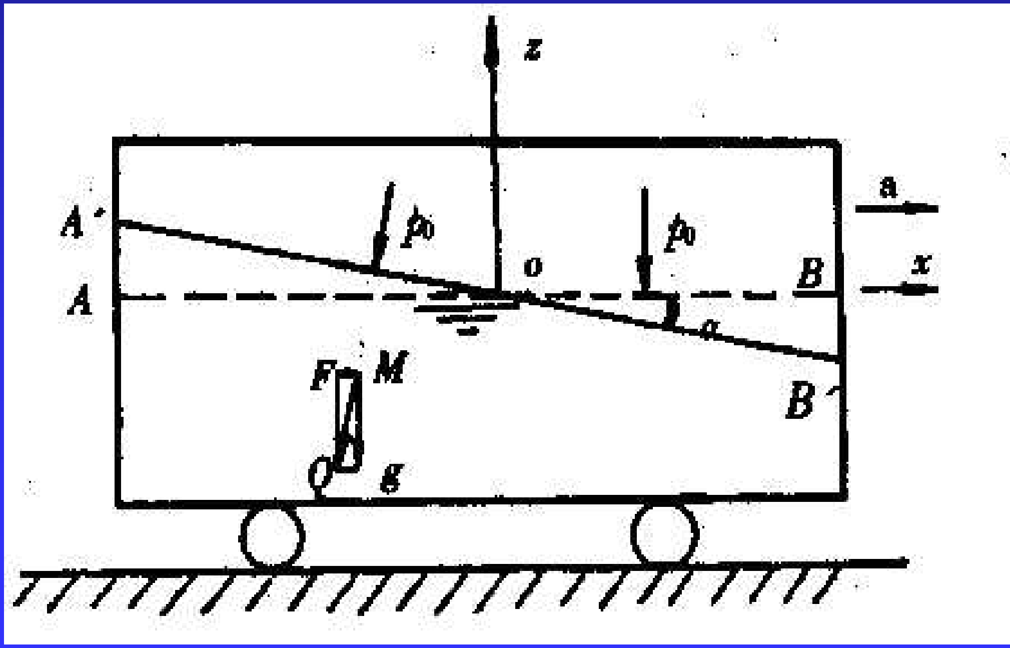
◆相对平衡的概念

◆相对平衡的特点

[直线等加速运动容器中的流体平衡]

$$\vec{f} = -\vec{a} + \vec{g}$$

$$dp = -\rho\left(adx + gdz\right)$$



（1）等压面的形状由$dp = 0$及原点条件得出。

$$x = z = 0 : p = p_0$$

$$z = -ax/g$$

（2）压力分布

$$p = p_0 - \rho(ax + gz)$$

$$= p_0 - \rho g(z + ax/g) = p_0 - \rho g(z + x \cdot tg\alpha)$$

括号里的项正是液面下一点距离自由液面的垂直高度。

[等角加速度旋转的液体平衡]

这是离心机的简单运行情况。设静止时半径为R容器内装有深度为H的液体。当容器以角速度作等速旋转时，液体除受重力外还受离心力的作用。把坐标系固定在容器上，则容器内的液体处在相对平衡状态。

利用静平衡方程，可以求出容器内液体的压力分布及自由面的形状。

直接把静平衡方程写成全微分形式，有

$$dp = \rho\left(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz\right)$$

自由液面处中心条件: $r = 0 : z = H_0$

自由面形状： $z = H_0 + \dfrac{\omega^2}{2g}\left(x^2 + y^2\right)$

压力分布： $p = p_0 + \rho g\left(\dfrac{\omega^2 r^2}{2g} - z + H_0\right)$

H_0的确定：根据质量守恒原理，容器在静止和旋转状态下的体积应该相等，即

$$\pi R^2 H = \int_0^R z(2\pi r dr)$$

$$H_0 = H - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

§2.7表面张力

★表面张力的现象。

★表面张力的本质。

★表面张力的方向。

表面张力的方向沿着液体表面并与边界垂直。

★表面张力的定义。

在液面上任意作一条曲线AB，线段两边的液体相互作用一定的拉力f，这个拉力垂直于所取的线段并且与液面相切，其大小与线段的长度l成正比：

$$f = \sigma l$$

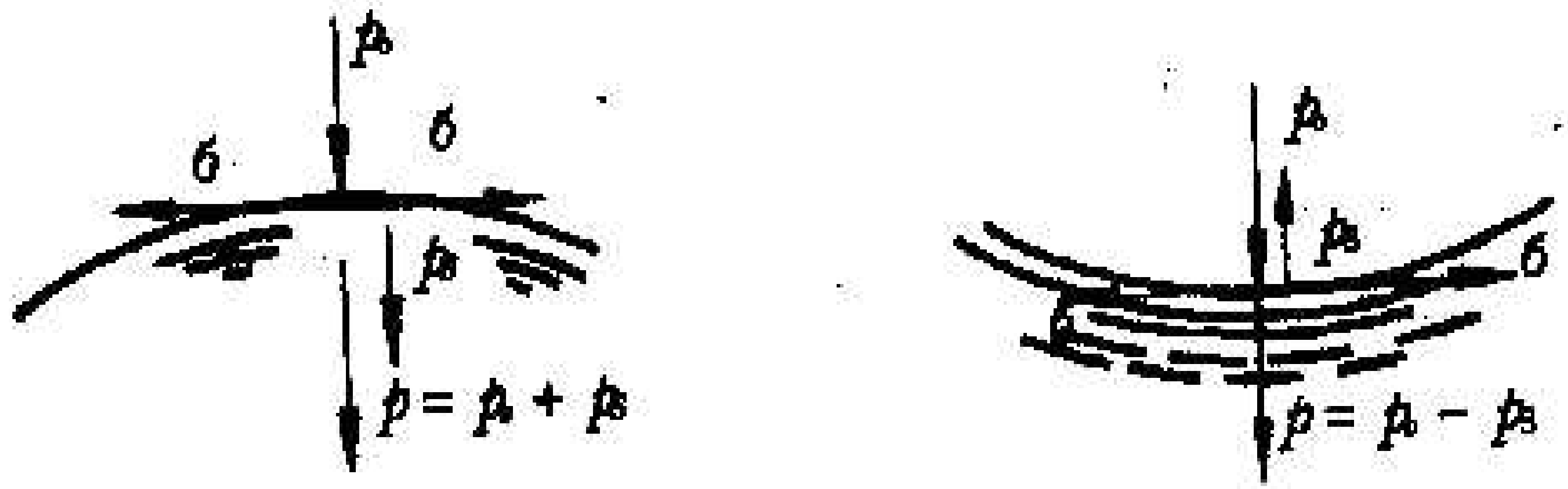
这里，σ称为表面张力系数(或毛细常量)

其单位为N/m，或者 $\mu N/mm$

★附加压强(或毛细压强、弯曲压强)

这是由于表面张力引起的弯曲液面内外两侧的压强差。

以下面左图说明。因为曲面是弯曲的，所以表面张力在此曲面的法向有一个合力p_s。



当液面凸起时，此表面张力的合力指向液体内部。这样在表面外的压强为大气压强，而表层内部压强为$p_0 + p_s$。

当液面凹下时，此表面张力的合力指向液体外部。这样在表面外的压强为大气压强，而表层内部压强为$p_0 - p_s$。

p_s就是附加压强（或弯曲压强）。

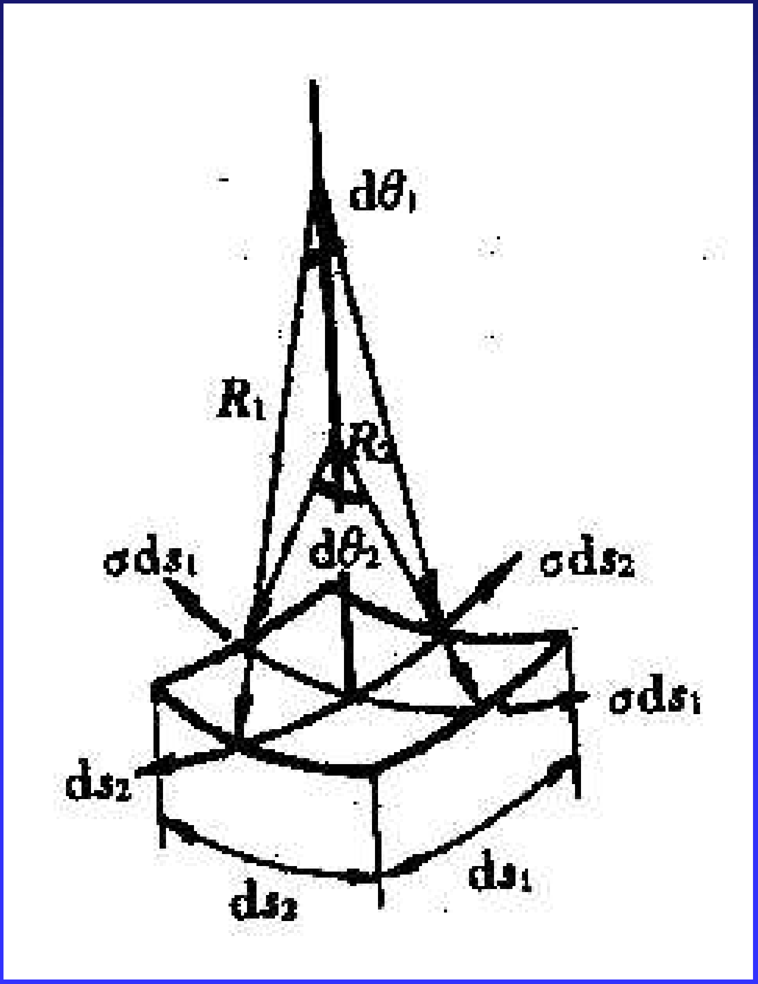
由于附加压强的存在：
凸起液面内侧的压强大于外侧。
凹形液面内侧的压强小于外侧。

★弯曲压强的大小：Yang-Laplace公式

在下凹的液面上取出如右边所示的弧长分别为dS_1和dS_2的矩形微元。弧dS_1和dS_2的半径分别为R_1和R_2，夹角分别为$d\theta_1$和$d\theta_2$。

作用在dS_1和dS_2上的表面张力分别为

σdS_1 和 σdS_2



四条边上，表面张力的垂直方向(法向)的分力为

$$F_z = 2(\sigma dS_1)\sin\frac{d\theta_1}{2} + 2(\sigma dS_2)\sin\frac{d\theta_2}{2}$$

因为 $\sin(d\theta/2) \approx d\theta/2$ 而 $d\theta = dS/R$ 所以

$$F_z = \sigma dS_1 d\theta_1 + \sigma dS_2 d\theta_2$$

$$= \sigma dS_1 \frac{dS_2}{R_2} + \sigma dS_2 \frac{dS_1}{R_1}$$

$$= \sigma dS_1 dS_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

把面积除掉，得到附加压强

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

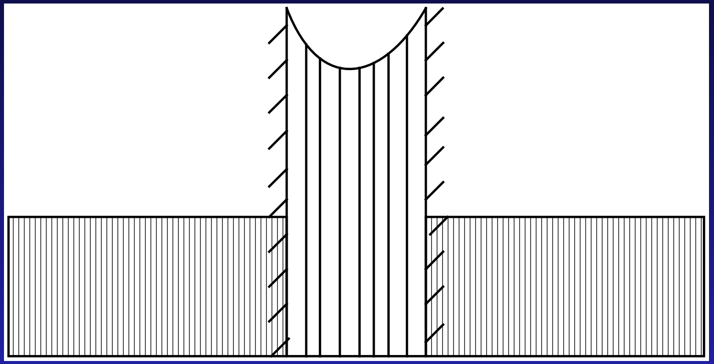
这是计算附加压强的Yang-Laplace公式。

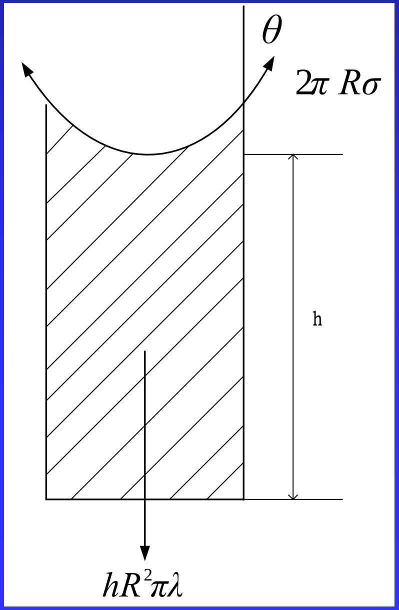
对于球形曲面，

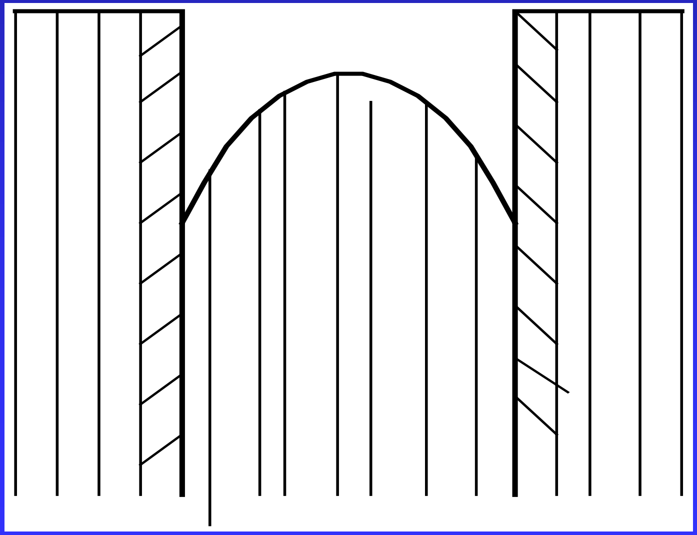
$$\Delta p = \frac{4\sigma}{R}$$

[毛细现象]

- 浸润（湿润）现象
- 毛细现象
- 接触角

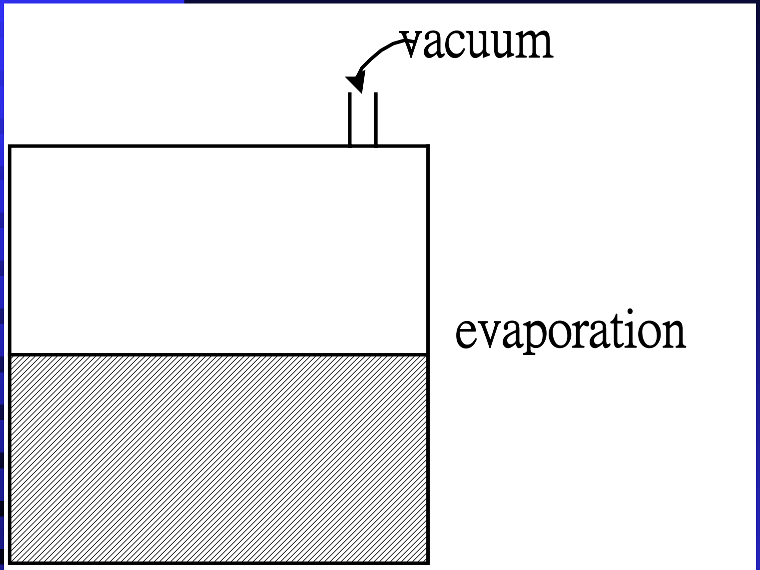


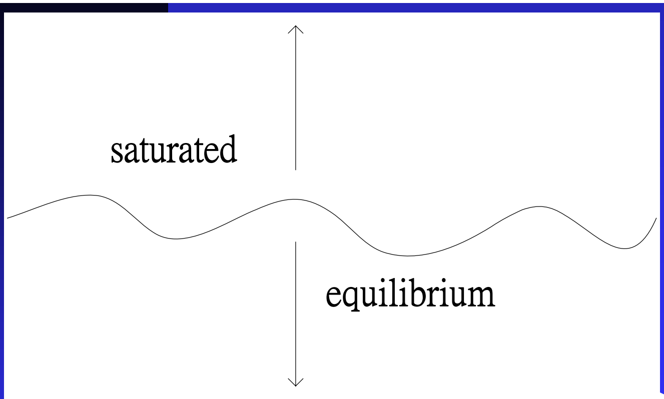




蒸气压

液体中，某些表面液态分子具有足够的动量来克服分子间吸引力而逃逸到大气中





压力称为蒸气压

沸腾：流体质量中蒸气气泡的形成；当流体中的绝对压力达到蒸气压时开始出现

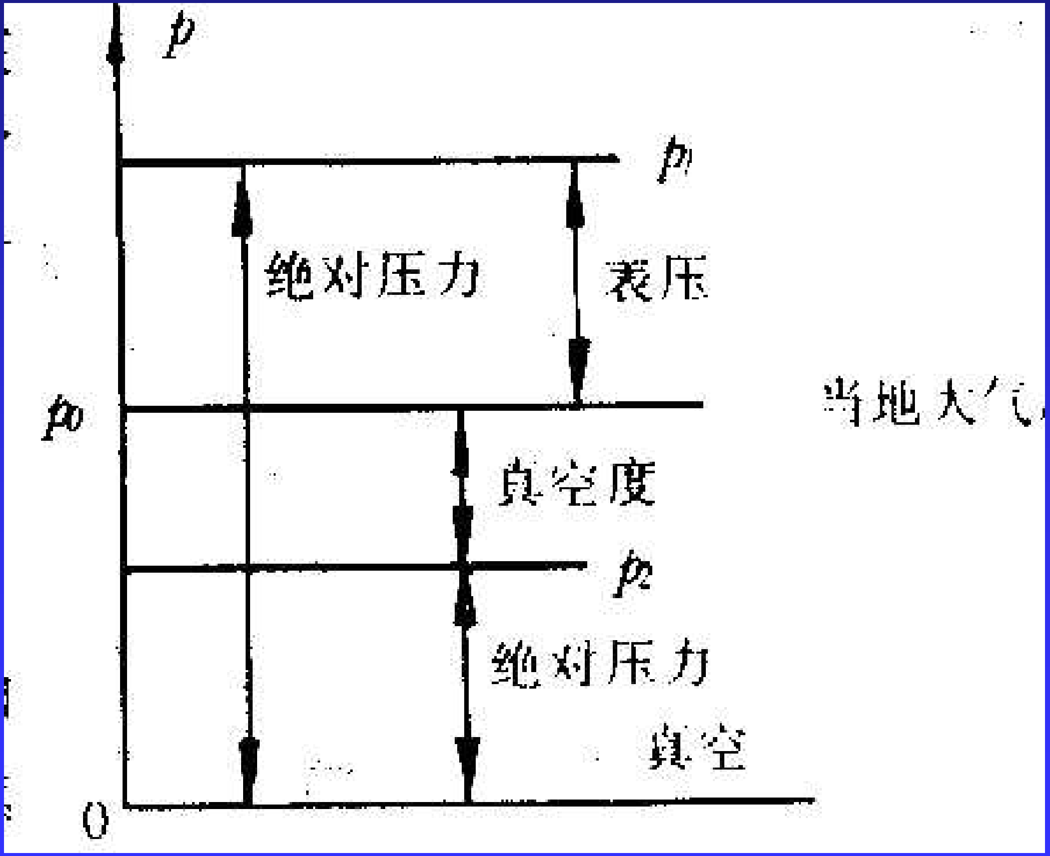
§2.8 流体静压强的测量

[1]绝对压强、相对压强和真空度的概念

绝对压强

相对压强

真空度

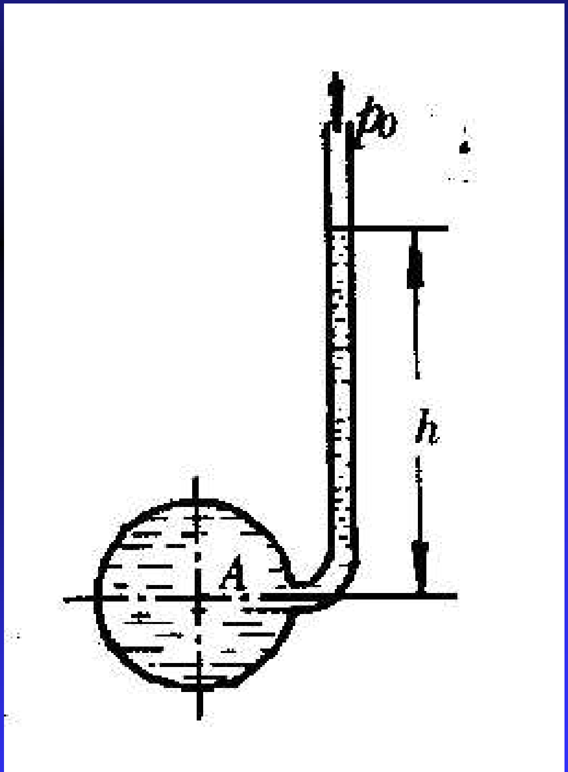


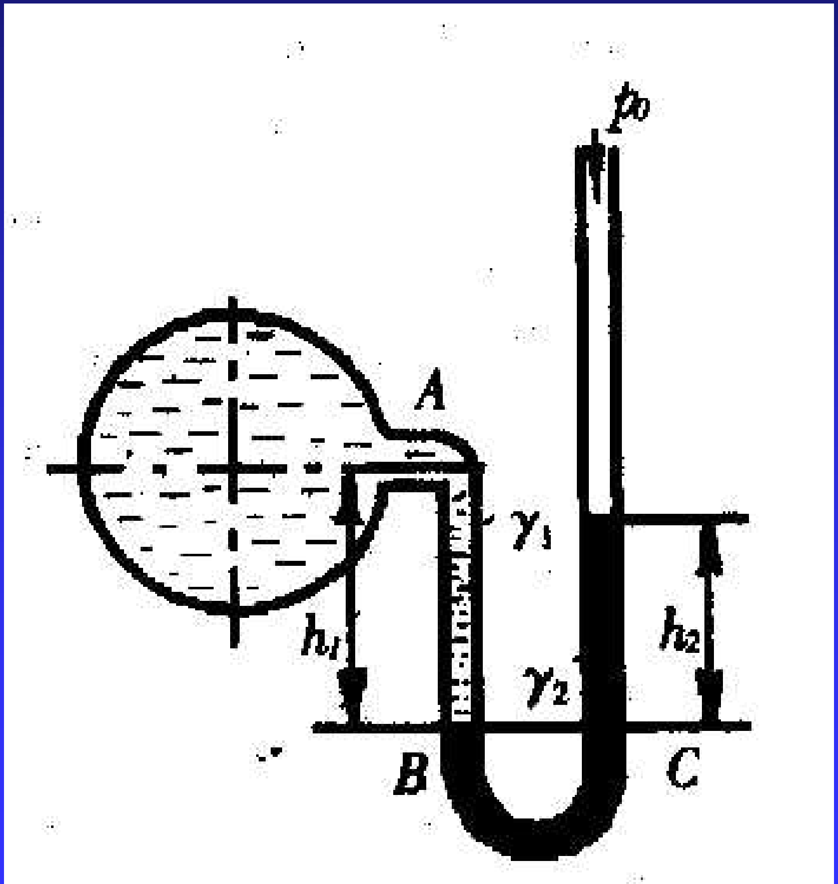
[2]测压计——测量流体压强的仪表。

◆机械式

◆电气式

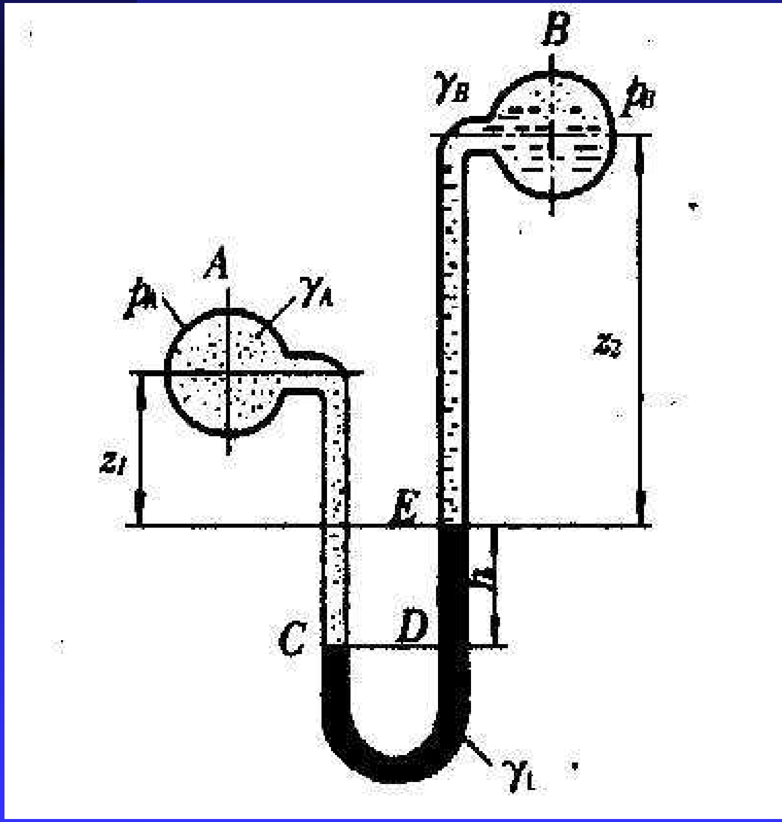
- 单管测压计（左图）
- U形管测压计

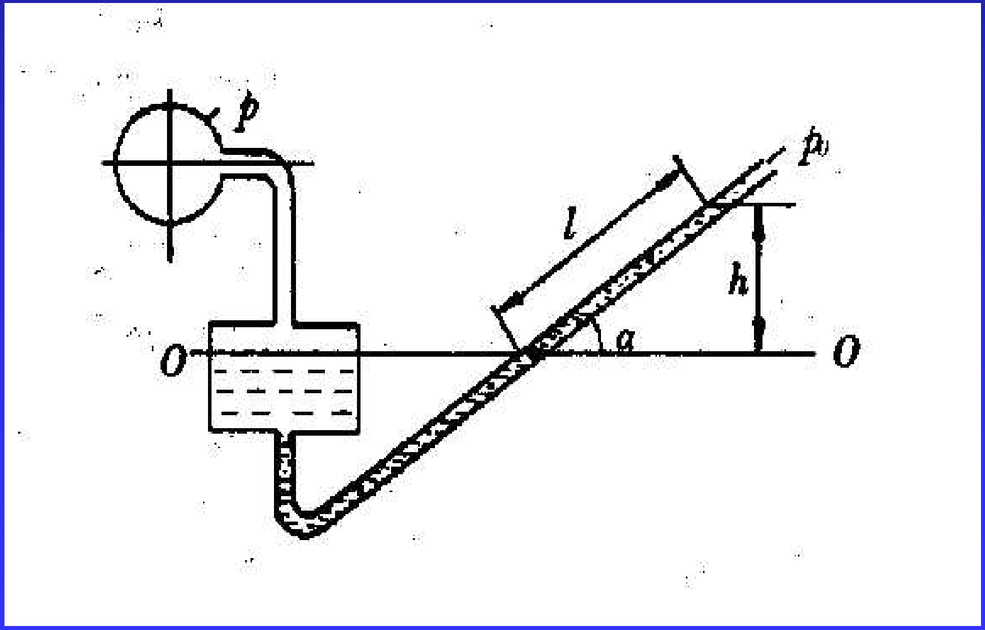


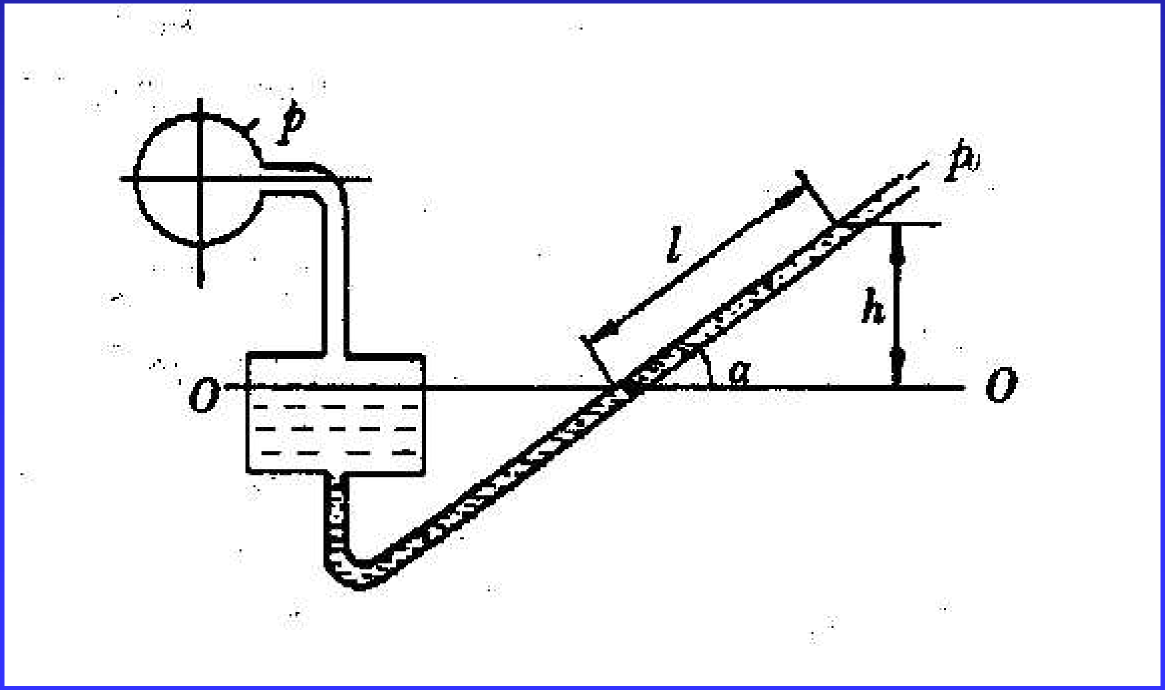


- 单管测压计
- U形管测压计
- U形管压差计
- 微压计（或称斜压管）
- 其他—如水排

- U形管压差计
- 微压计（或称斜压管）
- 其他—如水排






p
p₀
l
h
a
O
O

[习题]

- 补充：流体密度只是压力的函数（即跟温度无关）的流体称为正压流体，比如热力学等温过程的流场就是一例。请证明，正压流体的质量力也是有势的。
- pp.33-36

  Ex.2-7

  Ex.2-11

  Ex.2-14

  Ex.2-16

  Ex.2-22