第六章 平面不可压势流

§6.1 势函数和流函数

势函数只存在于无旋流动中。

流动无旋时，$\vec{\Omega}$ 恒为零，即

$$\Omega_x=\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}=0,\Omega_y=\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}=0,\Omega_z=\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=0$$

按照场论知识，如果一个矢量的旋度为零，则必然存在一个标量 φ ，使得这个矢量可以表示成该标量 φ 的梯度，即

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x},v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y},v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

这个 φ 就是速度的势函数。

或者，按照Cauchy-Riemann定理，当

$$\frac{\partial v_z}{\partial y}=\frac{\partial v_y}{\partial z},\frac{\partial v_x}{\partial z}=\frac{\partial v_z}{\partial x},\frac{\partial v_y}{\partial x}=\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

成立时，微分式 $v_x dx+v_y dy+v_z dz$ 成为全微分式：

$$v_x dx+v_y dy+v_z dz=d\varphi$$

这里的 φ 就是无旋流动的速度势，它满足：

$$v_x=\frac{\partial \varphi}{\partial x},v_y=\frac{\partial \varphi}{\partial y},v_z=\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

- 柱坐标系下，势函数和速度的关系是

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r}$$

$$v_\theta = \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta}$$

$$v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

势函数的意义在于，三个速度分量可以通过一个标量表示，从而可以使三个变量减为单变量。

势函数也可写成全微分形式，在直角坐标系下：

$$d\varphi = v_x dx + v_y dy + v_z dz$$

[例1]已知速度分布：$v_x = 6x, v_y = -6y$，求势函数。

[解]首先，需要判断势函数是否存在。对二维问题，只要判断涡量的z分量即可。因为

$$\partial v_x/\partial y - \partial v_y/\partial x = 0 - 0 = 0$$

所以，流动有势。按照势函数的定义：

$$v_x = \partial \varphi/\partial x = 6x, v_y = \partial \varphi/\partial y = -6y$$

从第一式积分，得到：$\varphi(x, y) = 3x^2 + f(y)$

再从第二式，定出 $f(y) = -3y^2 + C$，C可以取为零。

因此 $\varphi(x, y) = 3(x^2 - y^2)$

◆Laplace方程

如果流动是不可压缩的，那么必须满足下面的连续方程：

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0$$

把势函数的表达式代入，得到下面的Laplace方程：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

柱坐标下，对应的Laplace方程是：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

[说明]

(1)Laplace方程是一个线性方程，因此比较容易求解。在适当的边界条件下，一旦获得势函数的解，就立即可得到速度场分布。再按Bernoulli方程，就可求得压力场。这就是势函数的作用所在，也是势流理论的核心。

(2)Laplace方程是一个线性方程，也意味着它满足叠加原理：即如果φ_1和φ_2都满足方程，则其任意的线性组合$a\varphi_1 + b\varphi_2$也是原方程的解，这里a，b是任意两个常数。

请记住，只要是无旋流动，则势函数一定满足Laplace方程。

♦ 流函数

势流理论中，除了势函数外，还有流函数的概念。

对于平面(即二维)不可压缩流动，按照连续方程(这是必须满足的)：

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0, \text{即} \frac{\partial v_x}{\partial x}=-\frac{\partial v_y}{\partial y}$$

按照Cauchy-Riemann定理，下列微分式

$$-v_y dx+v_x dy$$

成为全微分式，即存在一个标量函数 ψ

$$d\psi=-v_y dx+v_x dy$$

这个ψ 称为流函数。显然，只有二维情况下才存在流函数，且流函数与速度的关系为

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

- 柱坐标下，流函数与速度的关系是：

$$v_r = \frac{\partial \psi}{r\partial \theta}, v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

对于流函数，当流动是无旋时，也满足Laplace方程。

因此，流函数也起着势函数的作用，也一样满足叠加原理。

说明：

①流函数与势函数在势流理论中的地位相等；但是它们存在的条件不一样。务必不要混淆。

②流函数与势函数满足Laplace方程的条件也不相同。

③请把与速度的关系以及全微分式都弄清楚。

总结:

	存在条件	Lapalce方程成立条件	与速度的关系	柱坐标系下与速度的关系
势函数	无旋（不管维数）	不可压缩	$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ $v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$	$v_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ $v_\theta=\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta}$
流函数	二维	无旋	$v_x=\frac{\partial\psi}{\partial y}$ $v_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$	$v_r=\frac{\partial\psi}{r\partial\theta}$ $v_\theta=-\frac{\partial\psi}{\partial r}$

- 势函数和流函数性质

a、有势的流动中，速度环量为零。

环量是指速度沿一条封闭曲线的积分：

$$\Gamma = \oint_l \vec{V} \cdot d\vec{s}$$

[证明]按照Stokes公式，沿曲线的积分等于通过该曲线所围的面积上被积函数旋度的面积分，即：

$$\Gamma = \oint_l \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_s (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

对于无旋流动，被积函数为零，因此，速度环量为零。

b、等流函数线就是流线。

[证明]因为流线的全微分式为

$$d\psi = -v_y dx + v_x dy$$

对于等流函数线，即满足$d\psi = 0$ 的线。显然由此得出的结论就是流线方程。

c、等势线和等流函数线互相垂直。

[证明] 按照等势线和等函数线的定义，

$$d\varphi = 0 \qquad d\psi = 0$$

$$v_x dx + v_y dy = 0 \qquad -v_y dx + v_x dy = 0$$

立即看到，这是互相垂直的。

§6.2 简单势流

a、直匀流(或均匀流)

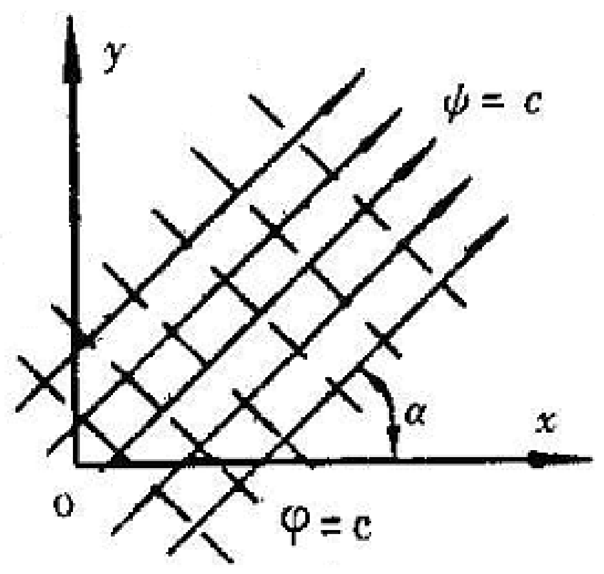
$$\begin{cases} u = V_0 \cos\alpha \overset{\Delta}{=} a \\ v = V_0 \sin\alpha \overset{\Delta}{=} b \end{cases}$$

这是一个无旋的二维流动，因此存在势函数和流函数。势函数和流函数分别为：

$$\varphi = ax + by + C$$

$$\psi = ay - bx + C$$

因此，分别是两族互相垂直的平行线。



均匀平行流

b、点源和点汇

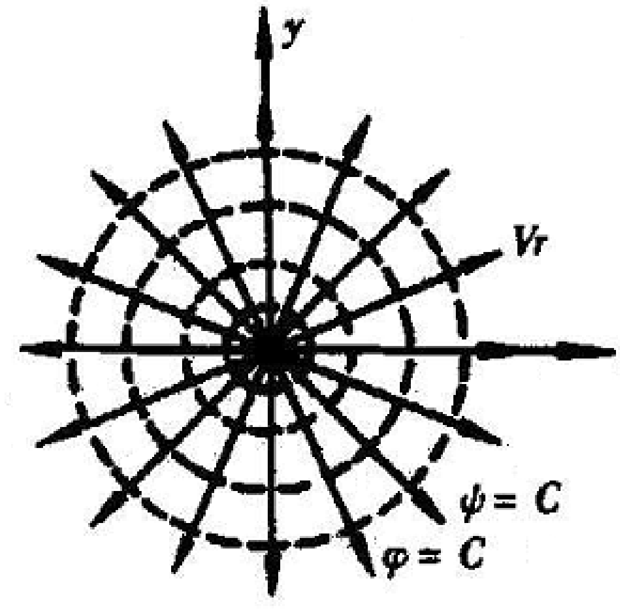
$$\begin{cases} v_r = \dfrac{q}{2\pi r} \\ v_\theta = 0 \end{cases}$$

q称为源或汇强度。这是一个无旋的二维流动，因此存在势函数和流函数。势函数和流函数分别为：

$$\varphi = \frac{q}{2\pi}\ln r$$

$$\psi = \frac{q}{2\pi}\theta$$

点源或点汇的中心是一个奇点。



点源（点汇）

c、点涡

$$\begin{cases} v_r = 0 \\ v_\theta = -\dfrac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases}$$

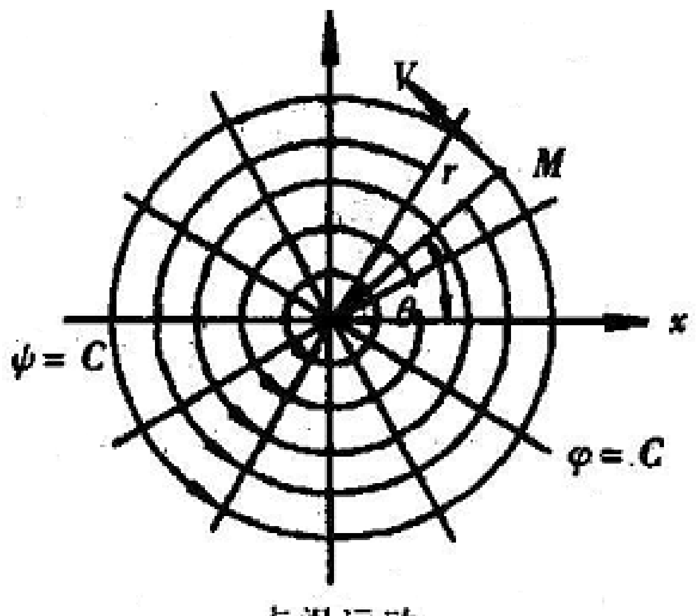
Γ 称为涡强度。 Γ 为正号时，流动沿逆时针旋转。这也是一个无旋的二维流动，因此存在势函数和流函数。势函数和流函数分别为：

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

点涡的中心也是一个奇点。

涡强度等于绕中心的环量。



点涡运动

势流的叠加

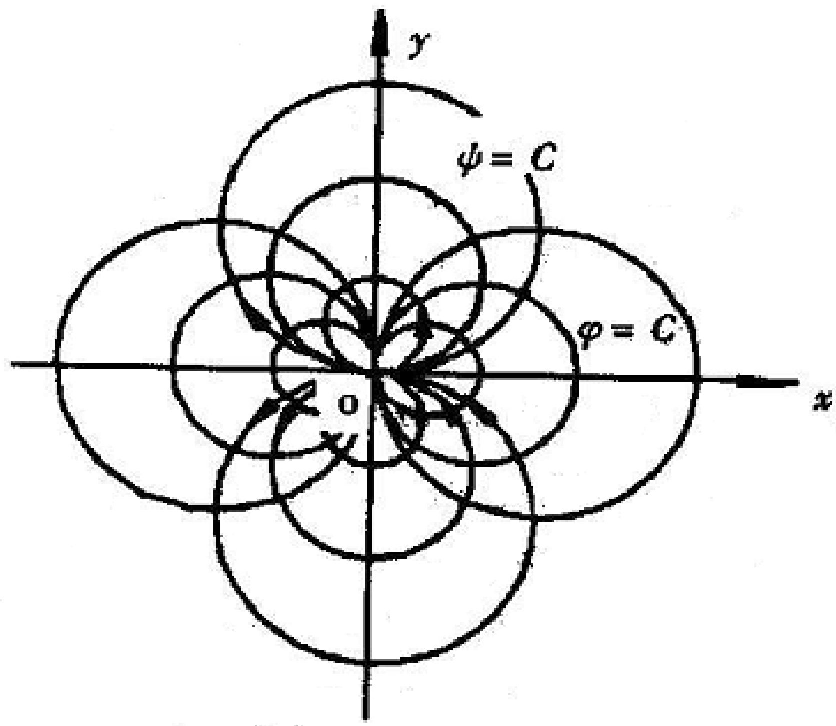
简单的势流解可以叠加出复杂的势流流动来。反之，一个复杂的势流问题可以分解为若干个简单的势流流动。

叠加要领：用叠加法求速度势的基本点，就是要保证所求问题的内外边界条件。这是因为几个势函数的叠加仍然满足Laplace方程，所以流场内部是没有问题的。

要满足内边界条件，就必须要形成一条流线与物体表面完全重合。这条流线的作用与物体表面完全相同。

d、偶极子

一个强度为+q的点源和一个强度为-q的点汇，相距2a。如果令a→0，q→∞，而其乘积为一个有限值，则得到偶极子流动。



偶极流的等势线和流线

按照定义，偶极子流动是一个势流，且其势函数为：

$$\varphi = \lim_{\substack{a \to 0 \\ q \to \infty}} \frac{q}{4\pi} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

这里M=2aq称为偶极子的强度。偶极子的流函数为

$$\psi = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

可以看出，偶极子的势函数和流函数分别为两族同心圆，且总是与y和x坐标轴相切。

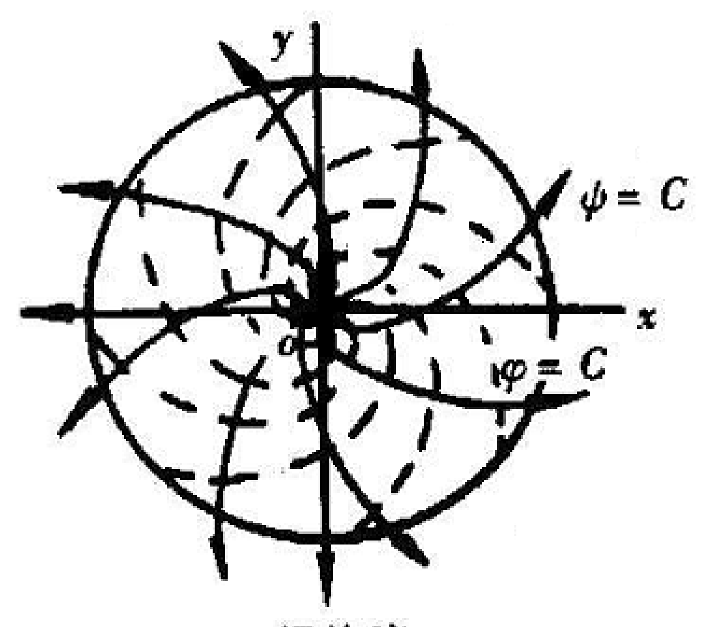
f、螺旋流动

点源和点涡的叠加，给出螺旋流动。其流函数与势函数分别为

$$\varphi=\frac{1}{2\pi}(q\ln r+\Gamma\theta)$$

$$\psi=\frac{1}{2\pi}(q\theta-\Gamma\ln r)$$

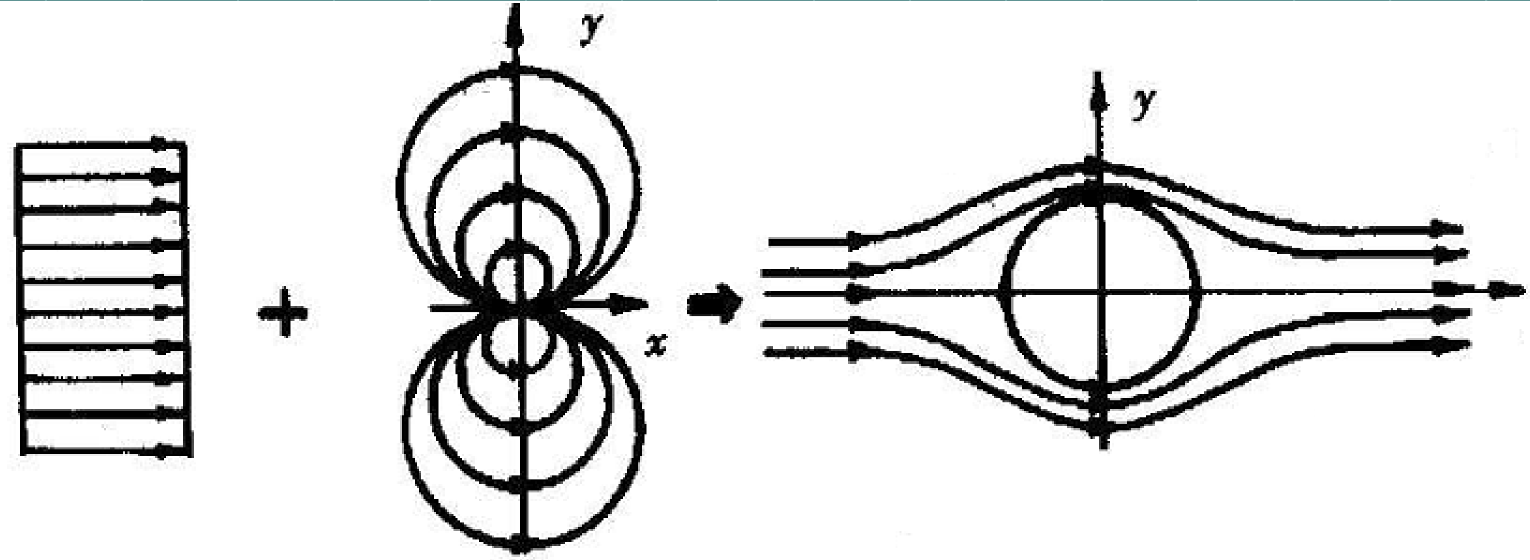
这个流动对分析许多旋转机械(如离心泵涡壳、旋风除尘器等)很有帮助。有时需要用点汇与点涡的叠加。



螺旋流

g、绕圆柱体的无环量流动

绕圆柱的理想流动，可以用一个直匀流和一个偶极子流的叠加来代替。



均匀流＋偶极流＝圆柱绕流

理想流体绕圆柱的流动

所以，理想圆柱绕流的势函数和流函数分别为：

$$\varphi = v_\infty x + \frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} \qquad \psi = v_\infty y - \frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

因为圆柱绕流时，中心线及物面上的流线是零流线，所以为了使这个叠加满足绕圆柱流动的实际情况，在圆柱面(即r=R)上，流函数必须为零。把这个约束代入流函数中，得到

$$M = 2\pi v_\infty R$$

所以，理想的圆柱绕流的势函数和流函数为：

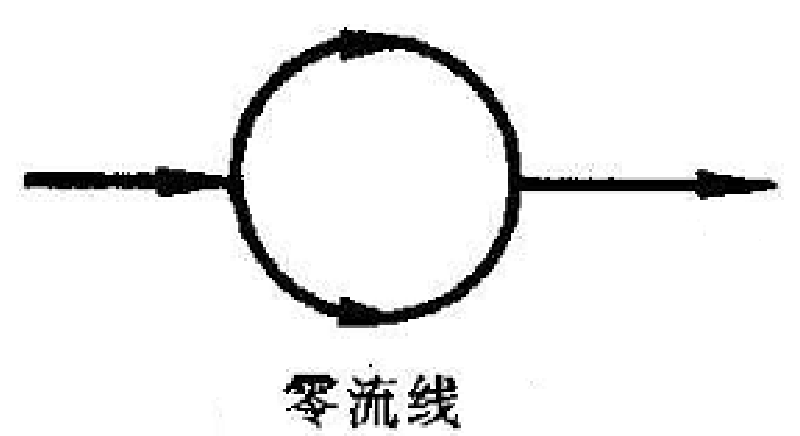
$$\varphi = v_\infty x\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right) = v_\infty r\cos\theta\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)$$

$$\psi = v_\infty y\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right) = v_\infty r\sin\theta\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)$$

下面进一步分析这个流动的特点：

[1]零流线

令ψ =0，则有y=0及r=R两个解。这说明令流线是x轴与圆柱面，即是从无穷远处来的沿x轴的流线，在圆柱的前驻点处分为上下两条流线，分别沿上下物面流动，最后由在后驻点处汇合后，沿x轴向下游流去。



[2]圆柱表面流动的特点

按照势函数与速度的关系，可得到圆柱绕流时的速度分布：

$$v_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=v_\infty\cos\theta\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right),v_\theta=\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta}=-v_\infty\sin\theta\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)$$

根据速度分布，可知物面上径向方向上没有速度

在前、后驻点处：$\theta=0,\pi:v_\theta=0$

最高点(最低点)处：$\theta=\pm\pi/2:v_\theta=2v_\infty$

所以最大流速出现在最高点与最低点上，且物面上，流速关于x和y轴都是对称的。

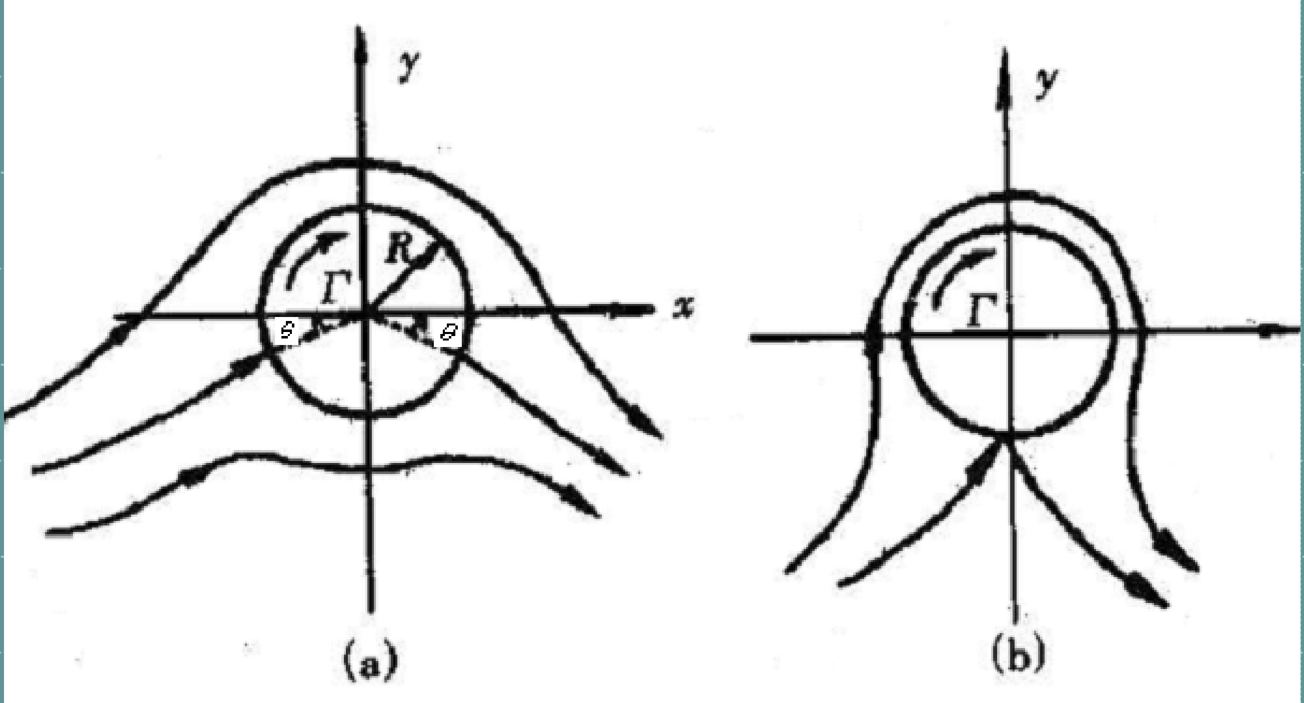
按照Bernoulli方程，压力的最大值在前后驻点处，在最高/最低点压力最小；并且圆柱面的上下、左右压力分布都是对称的。所以理想圆柱绕流既没有升力，也没有阻力。

实际情况下，圆柱绕流确实没有升力，因为流动沿x轴对称；但是实际情况下，圆柱绕流是有阻力的。这个错误称为A’Dlembert佯谬。造成这个佯谬的原因是没有考虑粘性。关于这个问题的解决是由边界层理论完成的。

而要求圆柱体受到升力，则需要有环量的流动。

h、绕圆柱体的有环量流动

绕圆柱的有环量的理想流动，可以用一个直匀流、一个偶极子流和一个点涡流动的叠加来代替。



带环量的圆柱绕流

有环量的圆柱绕流的势函数和流函数分别为：

$$\varphi = v_\infty \cos\theta \left(r + \frac{R^2}{r} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

$$\psi = v_\infty \sin\theta \left(r - \frac{R^2}{r} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

式中$\Gamma < 0$。

所以，复合流动的速度分别为：

$$v_r = v_\infty \cos\theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right), v_\theta = -v_\infty \sin\theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

当r=R时，

$$v_r = 0, v_\theta = -2v_\infty \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

现在滞止点的位置显然不在圆柱体的前后端点处，它可以如下求得：

在滞止点，有

$$v_\theta = -2v_\infty \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R} = 0$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{\Gamma}{4\pi R v_\infty}\right)$$

所以，前后驻点的位置向下移动；当然具体位置取决于 Γ ；此时流动沿y轴对称，而沿x轴不再对称，所以有升力产生。至于升力的大小，可按Bernoulli方程求出压强来后，再沿物面积分得到。

结果分别为：

- 圆柱体面上的压强分布：

$$p_b = p_\infty + \frac{1}{2}\rho_\infty v_\infty^2 - \frac{1}{2}\rho\left(-2v_\infty \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}\right)^2$$

- 有环量的圆柱体所受的升力：

$$\vec{Y} = -\int_A p_b \vec{n} dA = \int_0^{2\pi} \left(\vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta\right) p_b R d\theta$$

$$= -\rho v_\infty \Gamma \vec{j}$$

习题：

P151-152

Ex.6-4

Ex.6-8