第十一章 一维高速管流

§1、变截面等熵管流

一、变截面管流中的流动规律

在绝能无摩擦假设下，流动是等熵的。这里处理定常流动。

在等熵条件下，管道各截面具有相同的滞止状态、临界状态和极限状态。因此可以把它们当成是管流的共同参数。

为了了解可压缩流体在变截面管道中的流动和气流参数变化情况，应用一维气体动力学的基本方程式，可以得到管道截面面积变化对气流参数的影响。

$$\frac{d\rho}{\rho}+\frac{dv}{v}+\frac{dA}{A}=0$$

$$\frac{dp}{\rho}+vdv=0$$

由运动方程式，及马赫数的定义

$$vdv=-\frac{dp}{\rho}=-\frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{\rho}=-c^2\frac{d\rho}{\rho}$$

即 $$\frac{d\rho}{\rho}=-\frac{1}{c^2}vdv=-\frac{v^2}{c^2}\frac{dv}{v}=-M^2\frac{dv}{v}$$

所以 $$\frac{dp}{p}=\frac{dp}{\rho}\frac{\rho}{p}=-\frac{\rho}{p}vdv=-\frac{1}{RT}vdv=-\frac{\gamma v^2}{\gamma RT}\frac{dv}{v}=-\gamma M^2\frac{dv}{v}$$

代入状态方程 $$\frac{dT}{T}=\frac{dp}{p}-\frac{d\rho}{\rho}=(1-\gamma)M^2\frac{dv}{v}$$

最后，把相对密度公式代入连续方程，得到

$$\frac{dv}{v}=\frac{1}{M^2-1}\frac{dA}{A}$$

照此

$$\frac{dp}{p}=\frac{-\gamma M^2}{M^2-1}\frac{dA}{A}$$

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{-M^2}{M^2-1}\frac{dA}{A}$$

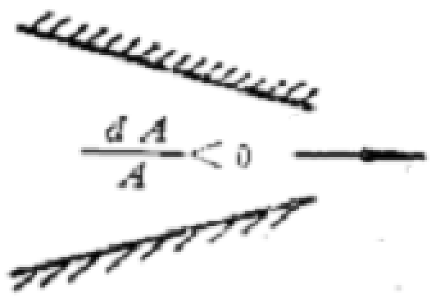
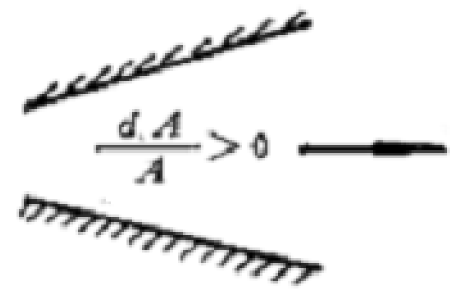
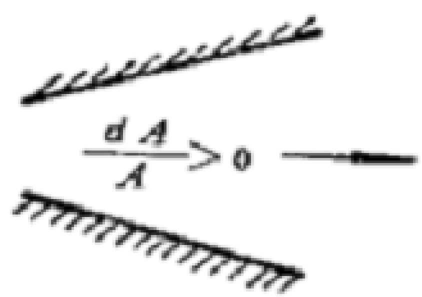
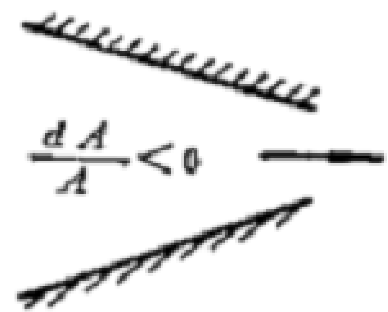
$$\frac{dT}{T}=\frac{-(\gamma-1)M^2}{M^2-1}\frac{dA}{A}$$

这是变截面管道内，一维定常可压缩流动的各物理参数与截面积变化的关系，是本章的基础。

从这些公式里，首先可以得到下列结果。

下面的表中，很清楚的表明了气流参数随管道截面积变化的规律。

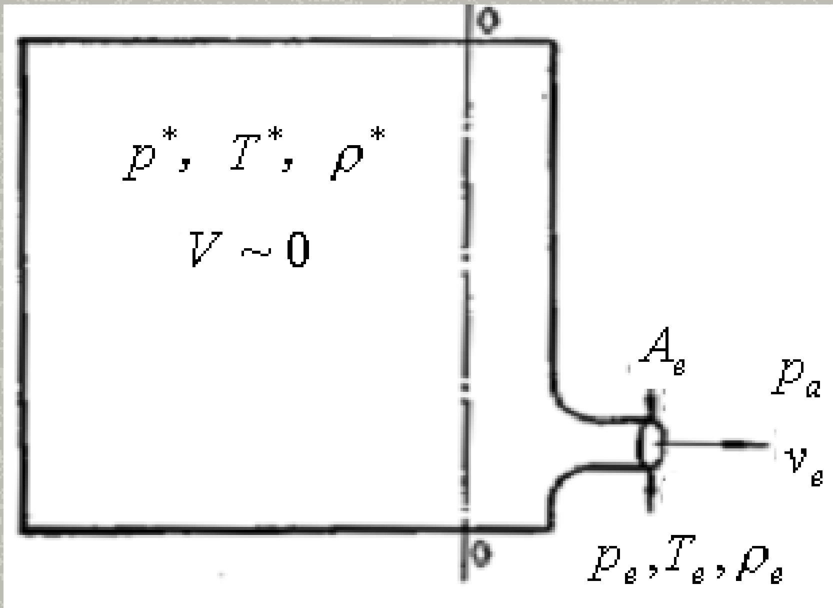
等熵流动中各参数的变化

	收敛管道	扩张管道
	$dp<0, dT<0$ $d\rho<0, dV>0$	$dp>0, dT>0$ $d\rho>0, dV<0$
亚音速流动 (M<1)		
超音速流动 (M>1)		

§2、收缩喷管

一个典型的收缩喷管，其上游与一个大容器相连，大容器中的压力、温度和密度分别为 p^*、T^*、ρ^*；喷管出口与环境大气相连，这个地方的压力称为背压（或反压）。喷管出口截面上的压力、温度和密度分别为p_e、T_e、ρ_e。

收缩喷管在航空发动机中，常用作排气管，通过在管内加速气流，获得所需要的推力。



收缩喷管

1、喷管出口截面上的流速和流量；临界压比

由一维能量方程

$$v_e = \sqrt{2c_p\left(T_e^* - T_e\right)} = \sqrt{\frac{2\gamma R T_e^*}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{p_e}{p_e^*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]}$$

这就是出口速度公式。等熵流动时，总温总压在管道内是不变的，因此等于进口总参数。此时，出口气流的参数取决于压比：p_e/p_e^* 。它越小，出口速度就越大。

我们已经知道，对收缩喷管，出口是最小截面，而最大可能的速度是音速。所以当出口马赫数为1时，速度最大，压比最小。这个压比定义为收缩喷管的临界压比。

按总静参数比关系，临界压比为

$$\beta_{cr}=\frac{p_e}{p_e^*}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

当 $\gamma=1.4$ 时，此值为 $\beta_{cr}=0.5283$。

切记，收缩喷管的最小截面处的最大可能速度是音速，并不意味着收缩喷管最小截面处一定是音速。

当收敛喷管的出口处达到音速，那么喷管中的流量就是最大，再降低反压也不可能提高流量。另一方面，如果出口截面没有达到音速，那么流量就必须按实际出口马赫数来计算。

当 M_e=1时，喷管的最大流量是：

$$\dot{m}=K\frac{p^*}{\sqrt{T^*}}A_e$$

2、 变工况分析

收缩喷管的工况是取决于反压与总压之比。先看此比值与临界压比的关系，便可定出收缩喷管内的流动工况。

为说明这点，我们通过一个实验来说明。假设喷管上游接一个贮气罐，因此喷管内气流保持总压不变。现在看看当反压变化时喷管内气流的流动情况。

◎亚临界状态—如果反压等于气流的总压，那么喷管内是没有流动的。当反压开始下降时，流动开始进行，但是相比于这个高反压，喷管气流的总压不足以将气流加速到喷管出口处达到音速，结果整个喷管内气流都是亚音速的，流量没有达到最大。这个状态称为亚临界状态。

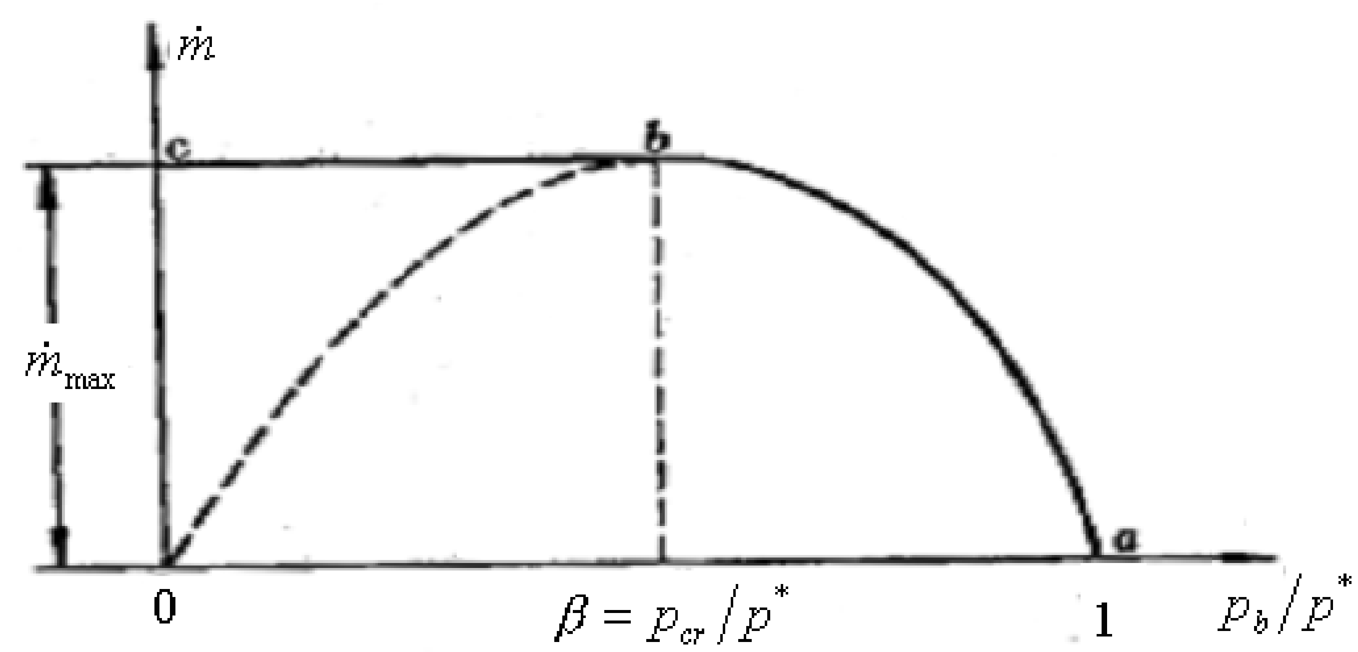
◎临界状态—如果反压继续下降，喷管内气流加速将越来越快，最终反压会下降到某个值后，喷管出口马赫数正好到1，此时流量达到最大；出口气流压力正好等于反压，结果气流出口是平稳的，即没有波系。这个状态称为临界状态或者设计状态。

◎超临界状态—如果反压再降低，因为喷管出口已经达到了音速，所以出口后气流流速将继续加速，但是这时候反压的影响已经不能逆喷管向上传播。所以出口马赫数仍然是1，而流量不变，为最大流量。但出口压力超过反压，出口气流是超音速流。这种状态称为超临界状态。工程上也说这种喷管设计短了，因为气流膨胀不足，所以推力有所损失。

出口气流是产生膨胀波还是激波？

反压对喷管内流量的影响见下图。

如果反压不变，而喷管内气流总压变化，情况也相仿。总之，收缩喷管内的流动取决于背压与总压之比。如果这个值大于临界压比，则喷管内是全亚音速流；等于临界压比，则喷管出口达到音速；超过临界压比，出口仍是音速流动。



气体流过收缩喷管时流量与背压的变化曲线

3、壅塞

对于给定出口截面的收缩喷管，当总温总压不变时，如果是在亚临界状态，那么随着反压的下降，出口流速和流量不断增加。但是到了临界状态或超临界状态，流量已达最大，再降低反压将不能增加流量。我们称喷管出口截面达到音速，流量达到最大的状态称为**壅塞状态**。

在壅塞状态，不能靠增加反压来提高流量。只能靠增加气流的总压、总温或者喷管出口截面。增加总温，流量是可以增大的。这就是加力燃烧的意义之一。

§3、拉瓦尔喷管

仍然假设管内的流动是等熵绝能的，所以滞止参数是不变的。

一、出口流速、流量与面积比公式

如果气流在拉瓦尔喷管中得到充分膨胀（所谓充分膨胀，就是设计工况），则喉道为最小截面，喉道处为音速。这样气流出口速度为

$$v_e = \sqrt{2c_p\left(T_e^* - T_e\right)} = \sqrt{\frac{2\gamma R T_e^*}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{p_e}{p_e^*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]}$$

跟收缩喷管一样。但是流量必须按喉道计算。

根据流量公式，可以得到喷管内任一截面与临界截面(即喉道)之比为：

$$\frac{A}{A_{cr}} = \frac{1}{q(M)} \quad \text{或} \quad q(M) = \frac{A_{cr}}{A}$$

因为我们已经知道，对于一个$q(M)$的值，可以有两个M数与之对应：一个是亚音速解，一个是超音速解。这表明在喉道截面之后拉瓦尔喷管中的流动既可能是亚音速流动也可能是超音速流动。

二、临界压比

对于绝能等熵的流动，气流的总温总压不变。这样一个设计完成的喷管，其出口面积比与喉道面积比是固定的。

这样按照面积比可以计算出两个可能出口的速度，一个是亚音速的，一个是超音速的。对应的有两个压力比：一个对应了亚音速出口的压比，一个对应了超音速出口的压比。

这两个就是拉瓦尔喷管流动状态的两个临界压比，分别记为 p_{e1}/p^* (亚音速出口)和 p_{e2}/p^* (超音速出口) 。喷管内的流动状态跟收缩喷管类似，取决于实际的反压与喷管总压之比跟临界压比相比的大小。

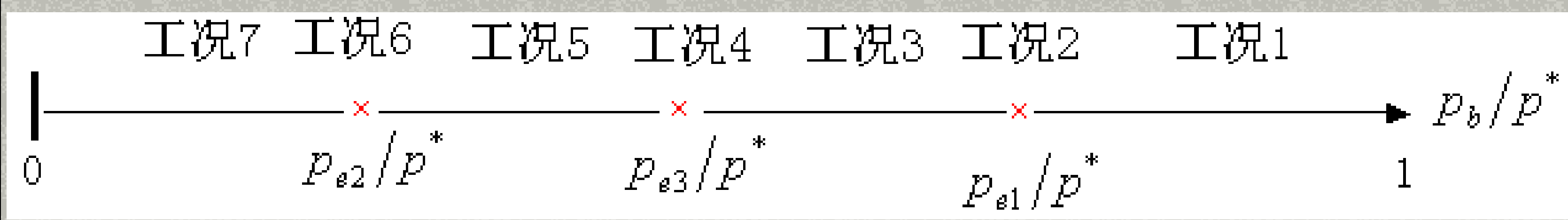
另外，收－扩喷管的临界压比还有一个，不是取决于面积比，将在下面看到。

因此收－扩喷管的流动工况被三个临界压比分隔为7个不同的情况。

二、变工况分析

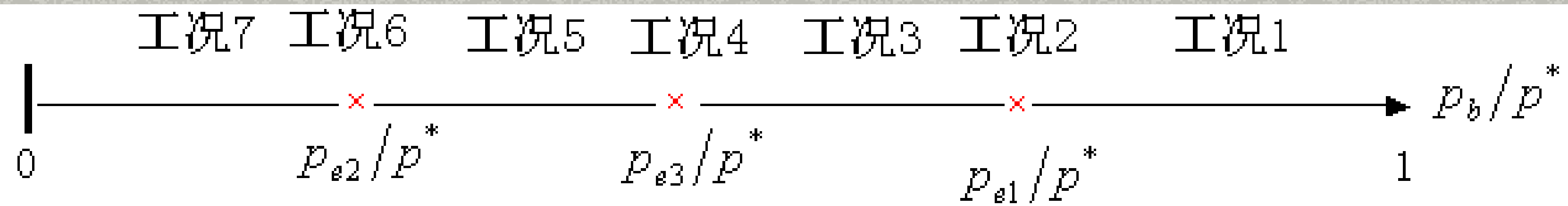
拉瓦尔喷管中的实际流动情况不仅取决于面积比，还和压比有关。先假设进口气流总压不变，而反压变化。有下列几种情况：

① $p_{e1}/p^* < p_b/p^* \le 1$。当最后的等式成立时，管内无流动。随着反压下降，管内开始有流动。当反压不太低时，喉部截面达不到音速。整个缩放喷管内都是亚音速流动。流量、出口速度、出口压力等都将随反压变化。流量不断加大。



② $p_b/p^* = p_{e1}/p^*$。此时喷管喉道达到音速，但是由于反压相对较高，气流的动能相对较低，所以不足以继续加速。所以气流只是在喉道处达到音速，而在扩张段仍然是亚音速。因为扩张管内进行，所以流动是减速的。

③ $p_{e1}/p^* < p_b/p^* < p_{e3}/p^*$ 。如果反压再低，气流的动能将更大，结果气流在喉道处达到音速后，依旧有足够的富余压差可以让气流在扩张段内加速，但这个工况中的气流压差不足以让气流在整个扩张管内加速到喷管出口。结果气流在扩张段内先加速一段，然后在某个位置处产生一道正激波。激波之后，流动成为亚音速的。



这个工况下正激波的位置的确定是一个难点。

方法是：先确定是否管内出现了正激波；如果是，则定出喷管出口气流马赫数。按照：

$$p_0^* A_{cr} = p_2^* A_e q(M_e) \qquad p_2^* = p_b \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

上面后一式子表示喷管出口处的压力为反压。因此

$$p_0^* A_{cr} = p_b \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \cdot A_e q(M_e)$$

由上式可定出喷管出口马赫数M_e，其中在上式中取亚音速解。

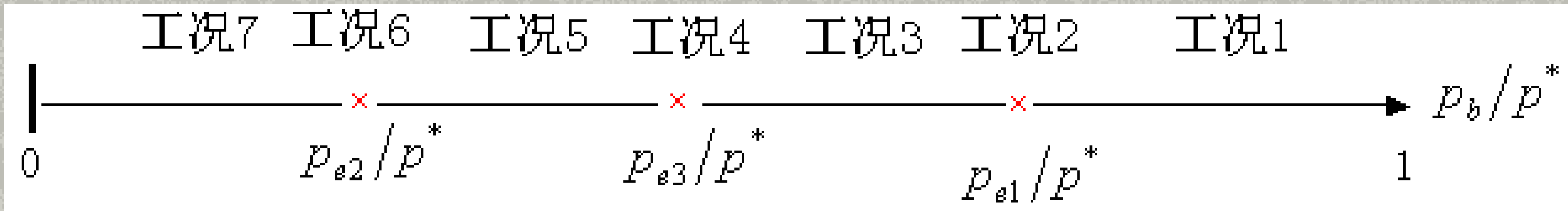
根据出口马赫数，很容易得到出口截面的总压。因为激波后总压不变，而经过激波时的总压比满足：

$$p_2^*/p_0^* = \left\{ \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_1^2} \right]^{\gamma} \right\}^{-1/(\gamma-1)}$$

这个关系式是正激波理论中激波前后总压比关系。由此可以计算出激波前的马赫数。根据这个马赫数，以及激波前气流总温总压，便可使用流量求出激波位置处的截面面积。这就是所求的Laval喷管内的正激波位置。

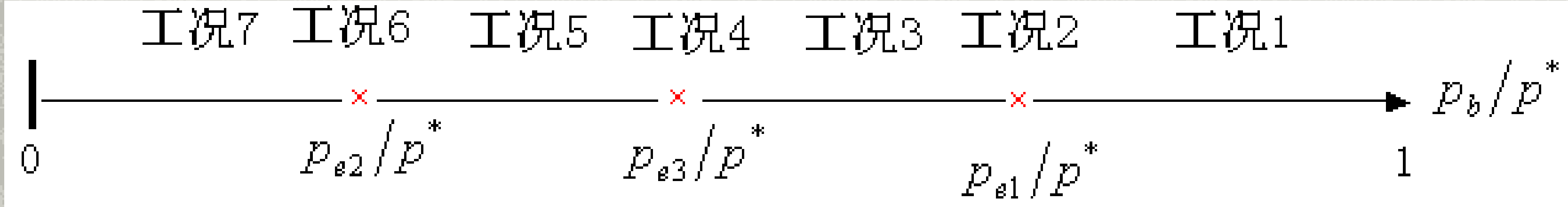
④ $p_b/p^* = p_{e3}/p^*$。反压再低下去，就会出现这样的情况。气流能在扩张段内按超音速一直加速下去，正好在出口处达到加速的尽头。结果在喷管出口面上产生一道正激波。经过正激波后，气流出喷管成为亚音速的。这个状态就是第三个临界状态。

⑤ $p_{e3}/p^* < p_b/p^* < p_{e2}/p^*$ 。如果反压再低，则激波被推出喷管外。换言之，整个扩张管内都是超音速流，而管口是激波系。这个工况称为Laval喷管的过膨胀工况。这个工况下喷管出口斜激波的位置与波后参数很容易确定。

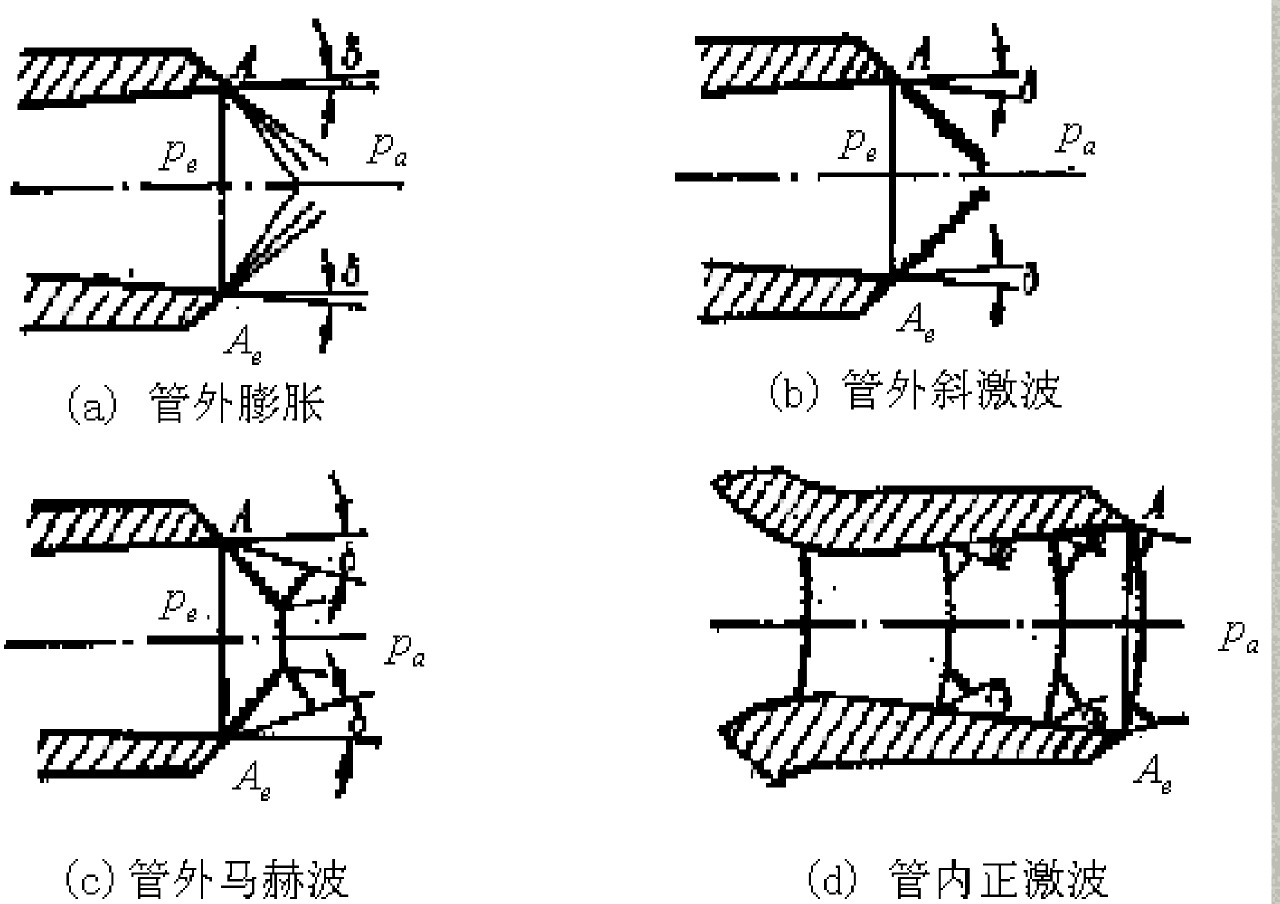


⑥ $p_b/p^* = p_{e2}/p^*$。这个工况下，气流从亚音速进口，一路加速，直到超音速出口，而且在管口出口截面上气流压力正好等于环境压力。因此这个工况下是最理想的情况，这就是Laval喷管的设计工况。

⑦ $p_{e2}/p^* < p_b/p^*$ 。这个工况下，气流仍然是在Laval喷管内一路加速到出口，但是此时出口截面上的压力比反压还要高，因此必须在管口产生膨胀波，以降低压力。这个工况称为欠膨胀。膨胀波后气流偏转、波后气流参数也很容易求得。



以上就是Laval喷管的所有工况。



非设计工况下拉瓦尔喷管内外的气流流谱

总结:

㈠流量如何变化?

㈡管内气流如何变化?

㈢出口气流如何变化?

㈣各个状态下气流参数如何计算?

§4、有摩擦的绝热流动

如图，在直管道中取出长度为dx的微分管段，考虑管壁的摩擦应力，根据动量定理得：

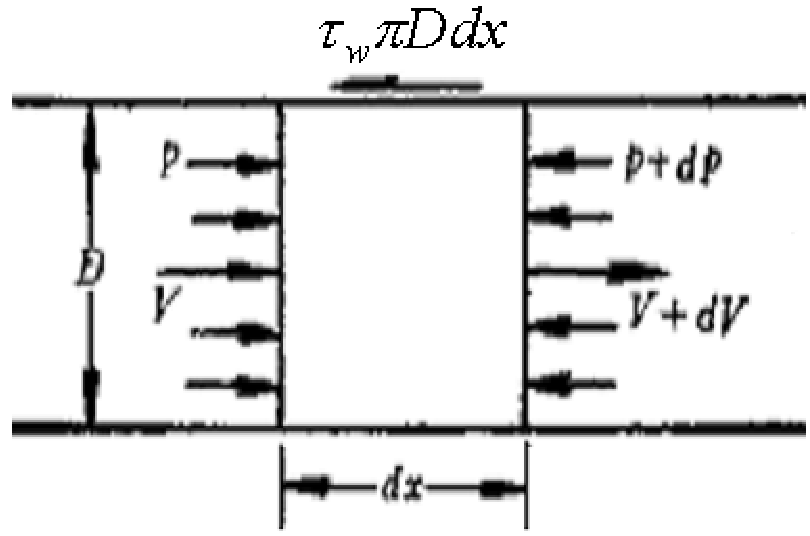
$$p\frac{\pi D^2}{4}-(p+dp)\frac{\pi D^2}{4}-\tau_w\pi Ddx=\rho V\frac{\pi D^2}{4}(V+dV-V)$$

化简得

$$VdV+\frac{dp}{\rho}+\frac{4\tau_w}{\rho}\frac{dx}{D}=0$$

令 $f=\dfrac{\tau_w}{0.5\rho V^2}$

这就是摩擦系数。



有摩擦的绝热流动的运动微分方程

代入得有摩擦存在时气流的一元定常运动微分方程

$$dp+\rho VdV+4f\frac{\rho V^2}{2}\frac{dx}{D}=0$$

<u>摩擦的影响</u>

将上述有摩擦的运动微分方程结合一元气流的能量方程

$$dh+VdV=0,$$

导得：$(M^2-1)\dfrac{dV}{V}=\dfrac{dA}{A}-4f\dfrac{k}{2}M^2\dfrac{dx}{D}$

无摩擦时 $\boldsymbol{(M^2-1)\dfrac{dV}{V}=\dfrac{dA}{A}}$

∴摩擦的作用总是相当于截面减小。

(1)亚音速气流M<1

收缩形管（dA<0）：摩擦使气流比无摩擦过程加速得更快: $dV/V > 0$

渐扩形管（dA>0）：摩擦使气流比无摩擦过程减速变慢，压力上升变慢。

(2)超音速气流M>1

收缩形管（dA<0）：摩擦使气流比无摩擦过程减速得更快: $dV/V < 0$

渐扩形管（dA>0）：摩擦使气流比无摩擦过程加速变慢，压力降低变慢。

(3)在有摩擦的等截面管（dA=0）中流动，相当于在收缩管中无摩擦的流动。

M<1，亚音速气流，$dV/V>0$ 气流加速。$\xrightarrow{\text{极限}}$ 音速

M>1，超音速气流，$dV/V<0$ 气流减速。$\xrightarrow{\text{极限}}$ 音速

∴在有摩擦存在的等截面管中，使气流由亚音速连续地变为超音速，或有超音速连续地变为亚音速，都是不可能的。

(4)由于摩擦的作用，在收缩变截面管中气流的临界截面不在最小截面处，而是在 $\frac{dA}{A}=\lambda\frac{k}{2}\frac{dx}{D}>0$ 处，即扩张段中才达到临界速度。

作业(p245):

Ex11-1

Ex11-5

Ex11-9