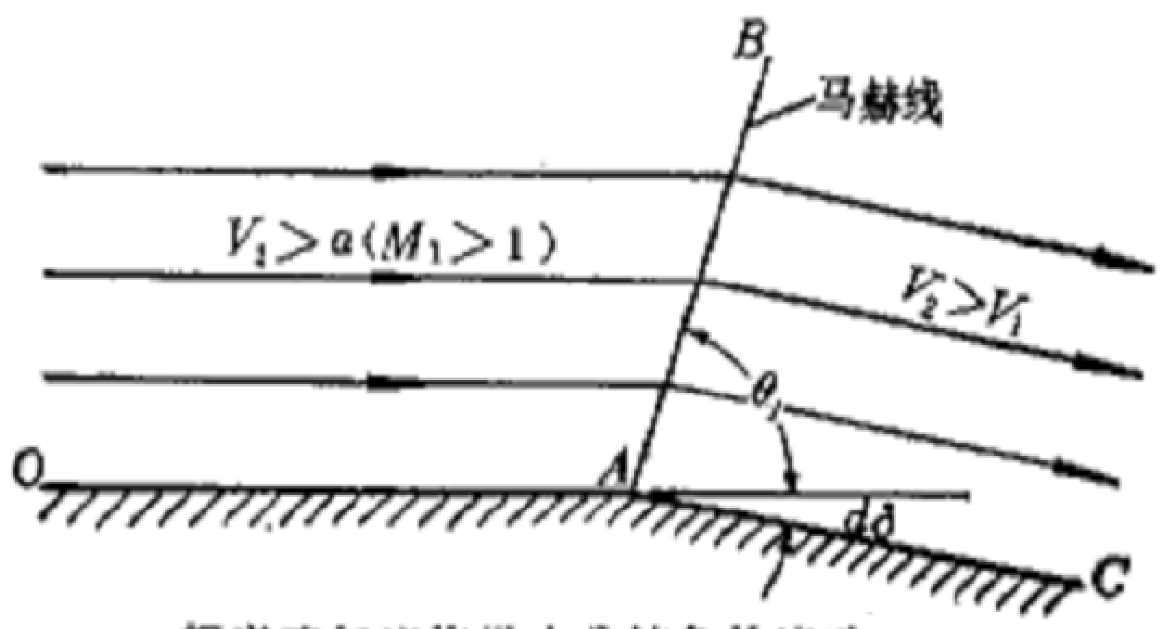
第十章 膨胀波和激波

§ 10.1 膨胀波

1、膨胀波的形成

㈠定常二维平面超音速流绕外钝角的流动

壁面转折点对超音速来流是一个扰动源。在此扰动源产生的扰动向下游传播，是按马赫锥传播的，马赫锥是以马赫线为标志的。马赫线与均匀来流的夹角是马赫角。

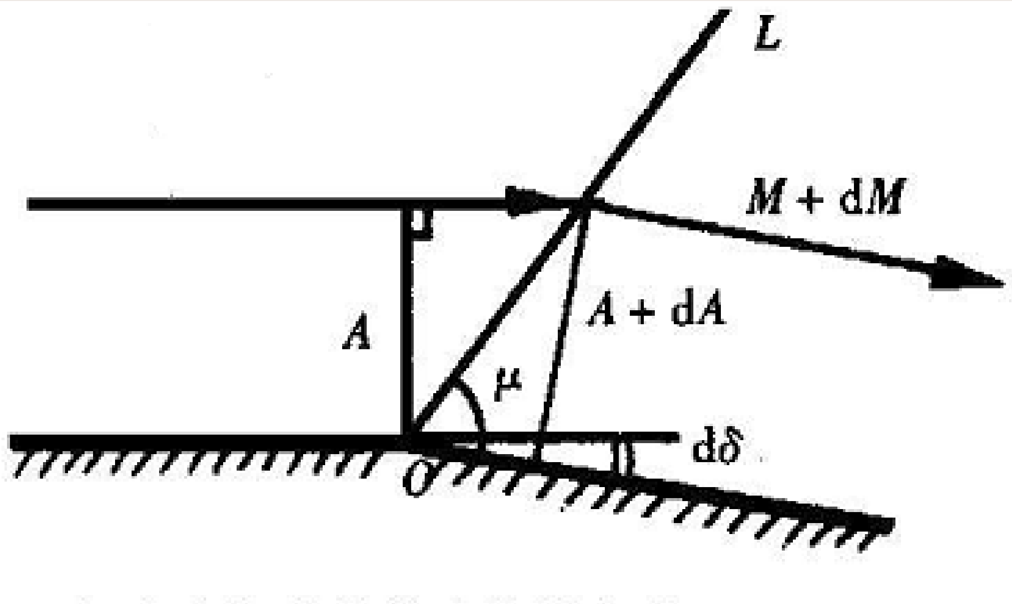


超音速气流绕微小凸钝角的流动

㈡气流经过马赫线后，要偏转一定的角度。偏转后，气流流通截面扩大，因此气流加速（因为这是超音速流动），压力、温度等下降。因此称为膨胀波。

㈢如果只是一条马赫线，不足以使气流产生很大的转角，只能是一个微小偏转。这是小扰动的特点。

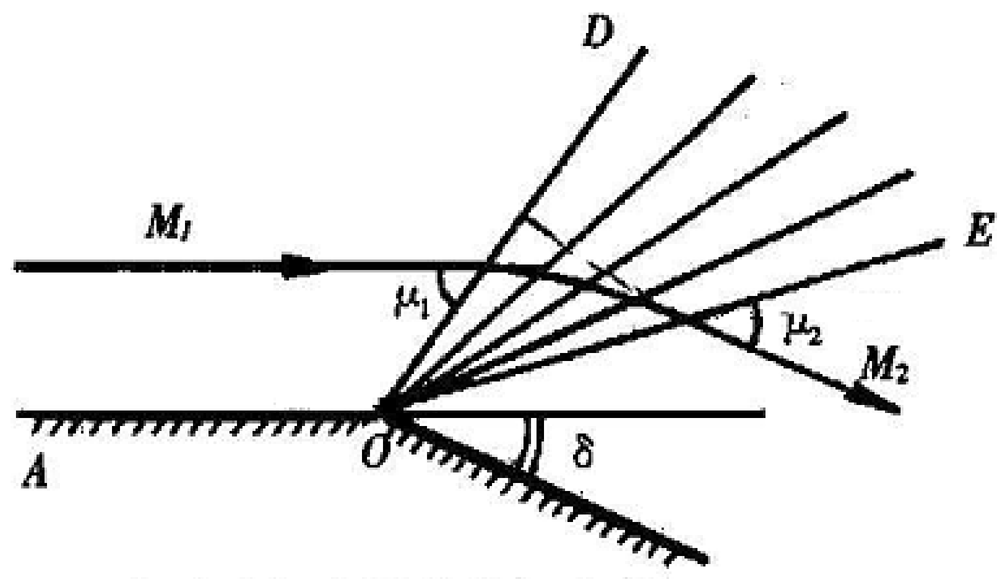
因此在经过一个有限转角处，势必会发出一系列膨胀波。



超声速气流的微小偏转流动

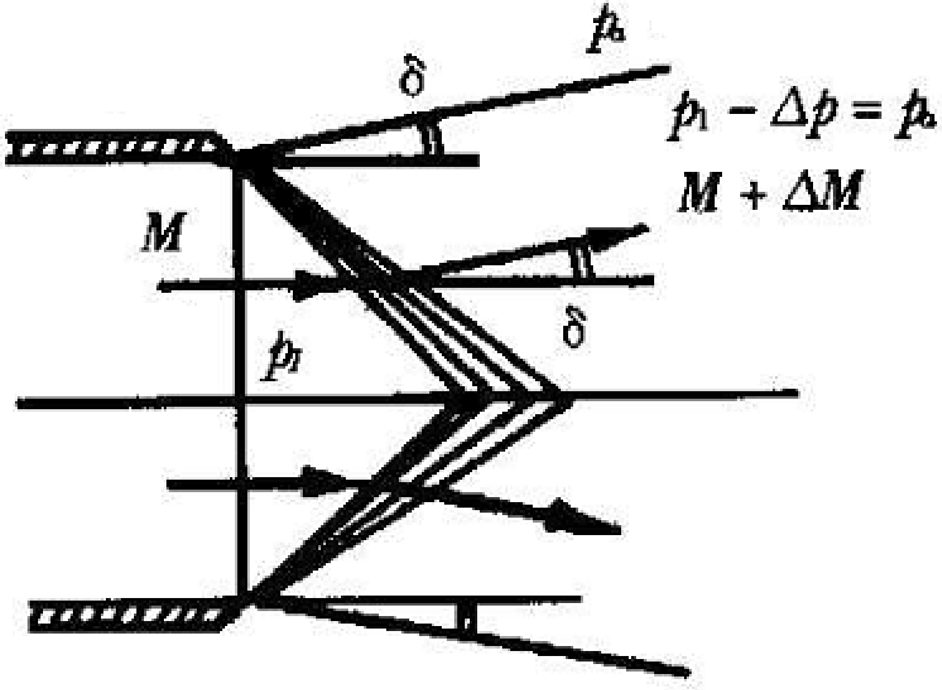
㈣膨胀波束是由一系列马赫线所组成。气流经过每道马赫线，速度上升一点，压力温度下降一点，这个过程近似是等熵的过程。所以经过膨胀波后，气流的总温总压是不变的。

㈤如果来流均匀，马赫线就是直线，膨胀波束就是一个扇形。这样的膨胀波扇称为普朗特-梅耶膨胀波(Prandtl-Mayer expansion wave)。



超声速气流绕外钝角流动

㈥除了物体形状变化处会产生膨胀波，由于压力的不同也会产生膨胀波。

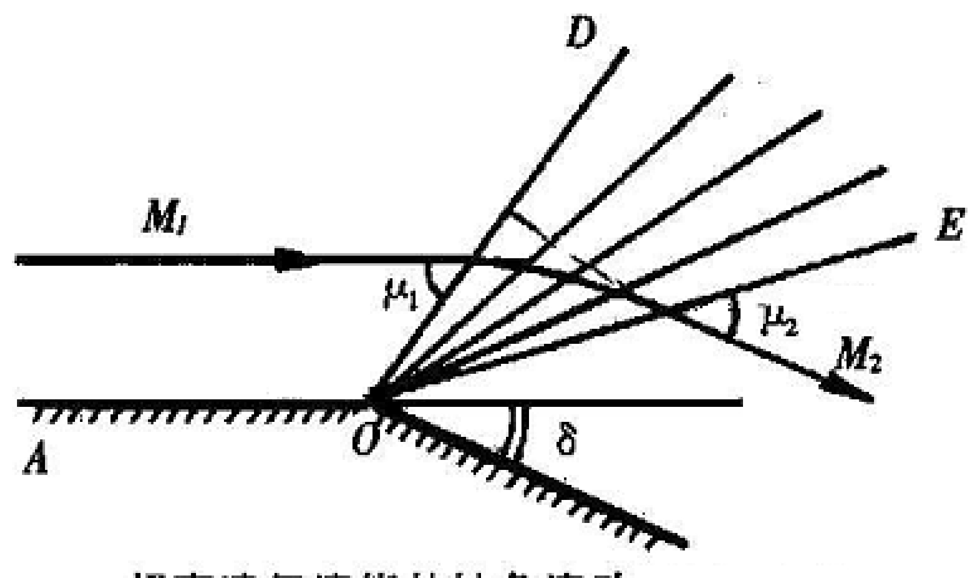


喷管出口流动

2、普朗特-梅耶膨胀波的计算

如图，O点的转折角为δ，超音速气流将发生连续膨胀。

从马赫线OD开始连续变到马赫线OE为止。中间存在无穷多条马赫线，组成一膨胀波组。压力由p_1下降到p_2，速度由V_1上升到V_2，其变化可看成无穷多个微小变化dp和dV的合成。在膨胀区DOE中的流线是弯曲的，各马赫线与流线之间的角度沿着气流方向逐渐变小。



超声速气流绕外钝角流动

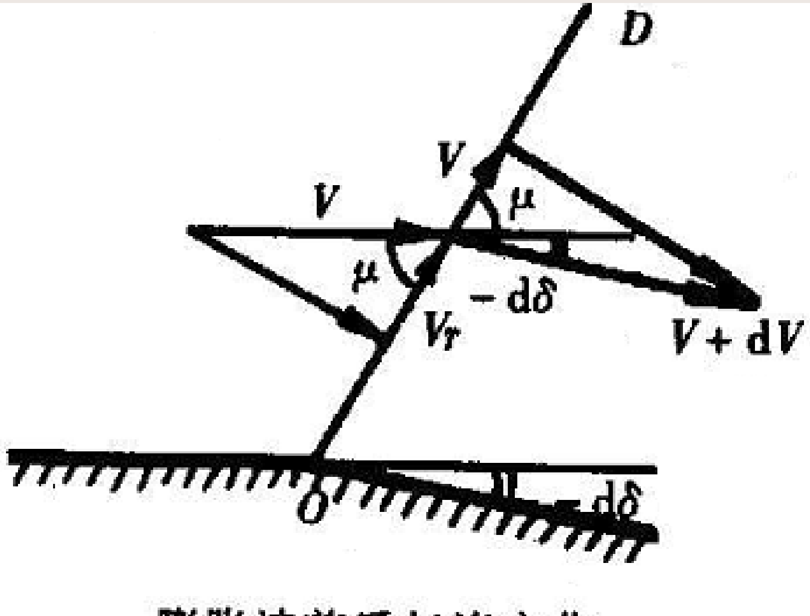
先来建立经过一条马赫线的偏转计算。

按照顺时针转角为负的原则，向下的转角为 $-\delta$。把来流速度V沿着与马赫线垂直与相切的方向进行分解。

因为气流沿切线方向的速度是不会改变的，这是从沿切向的动量定理知道的。这样波前波后切向速度相等：

$$V\cos\mu$$

$$=(V+dV)\cos(\mu-d\delta)$$



膨胀波前后气流变化

因为$$\cos(\mu - d\delta) = \cos\mu\cos d\delta + \sin\mu\sin d\delta$$
$$\approx \cos\mu + d\delta\sin\mu$$

所以 $$\frac{dV}{V} = -tg\mu d\delta = -\frac{d\delta}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

即 $$d\delta = -\sqrt{M^2 - 1}\frac{dV}{V}$$

这就是经过一条马赫线后，气流的偏转角。注意，此式中的负号是对于向下偏转的，如果是向上偏转的，则变为正号。

为了得出经过膨胀波扇的总偏转角，需要把上式积分。但是首先需要把速度和马赫数联系起来。

由$V^2=M^2c^2=M^2kRT$，得

$$V^2=\frac{kRT^*M^2}{1+\frac{k-1}{2}M^2}$$

微分此式，得

$$\frac{dV}{V}=\frac{1}{1+\frac{k-1}{2}M^2}\cdot\frac{dM}{M}$$

代入一条马赫线的微偏转角，得到：

$$d\delta=-\frac{\sqrt{M^2-1}}{1+(\gamma-1)\left(M^2/2\right)}\cdot\frac{dM}{M}$$

这是最后的用M数表示的气流转角公式。

假设第一道马赫线处的气流马赫数为M_1，经过第一道马赫线后气流转折角为 δ_1；在最后一道马赫线处的气流马赫数为M_2，马赫线后气流转折角为 δ_2；则积分上式得到：

$$\delta_2-\delta_1=-\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}arctg\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M_2^2-1\right)}+arctg\sqrt{M_2^2-1}$$

$$+\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}arctg\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M_1^2-1\right)}-arctg\sqrt{M_1^2-1}$$

这就是气流从M_1膨胀到M_2所产生的转折角。

(二)但是气流经过第一道马赫线后气流的转折角δ_1和马赫数都无法知道；因此常这样处理：假设来流马赫数正好是1，则气流经过第一道马赫线是不会有偏转的。即：M_1时=0。

这样

$$\delta = -\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} arctg \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M^2-1\right)} + arctg\sqrt{M^2-1}$$

可以当作气流从音速来流经过膨胀波后，转折角与波后气流的马赫数的关系。把这个角度称为普朗特-梅耶角。

从这个角度出发，令

$$\nu(M)=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}arctg\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M^2-1\right)}-arctg\sqrt{M^2-1}$$

称为Prandtl-Mayer函数，或称为Prandtl-Mayer角。它表示对于来流马赫数为1时，经过膨胀后气流速度达到M时，所能偏转的角度。这个式子已经制成表格，在知道M数和 $\nu(M)$后，从这个表格中可以查到另一个值。

(三)对于来流马赫数为M_1而最后速度为M_2，气流总偏转角为：

$$\delta=\nu(M_2)-\nu(M_1)$$

⑷如果壁面转折是朝上的，膨胀波将沿逆时针方向，此时普朗特-梅耶角是正数。否则为负数。

⑸当最终马赫数为∞，达到普朗特-梅耶角的最大可能值

$$\nu_{\max} = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}-1\right)$$

但这只是一个理论值，因为早在达到这个速度前，气流就会冷凝了。

[例1]马赫数1.4的空气，绕一外钝角偏转了20^o。已知来流的初始静压和静温分别是 p_1=101325N/m^2，T_1=288K，求 膨胀后气流的马赫数、静压和静温。

[解]由来流马赫数M_1，可以查表或者根据Prandtl-Mayer角求得$\nu_1 = 8.987^o$，这个角度表示音速的来流经过膨胀后气流马赫数为M_1后的偏转角。

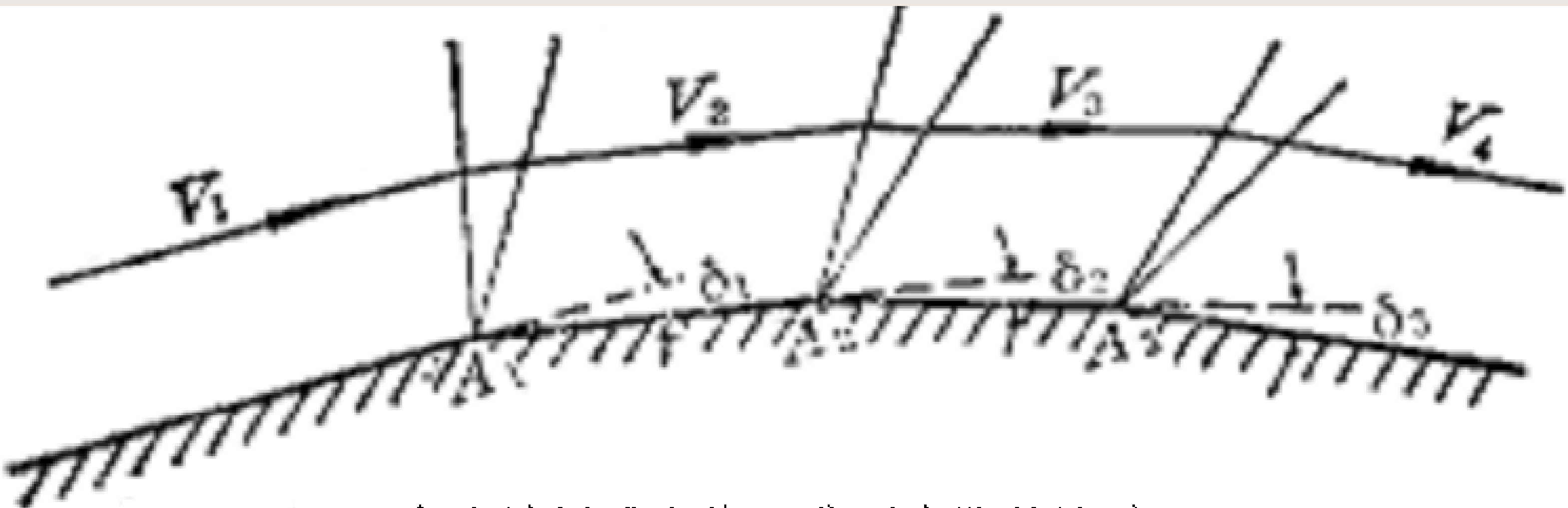
这样，从音速的来流膨胀到M_2的总偏转角为 $\nu_2 = 8.987^o + 20^o = 28.987^o$

再查表或计算得到M_2=2.096。

因为气流经过膨胀波是绝能等熵的，所以总温总压不变，借此可以计算出波后静压和静温。

㈥在连续转折或凸曲面处的膨胀波。

不论多道转折，还是曲面转折，只要知道气流膨胀之后的马赫数、或者总的折转角，便可求得另一个。



多次转折或者绕凸曲面膨胀的流动

[例2]拉瓦尔喷管的出口处，M_e=1.2 ， 气流出口处的总压为3个大气压，问：

①出口处气流是膨胀还是压缩？

②膨胀或者压缩的气流偏转角多大？绝热指数取1.4。

[解] ①根据拉瓦尔喷管的出口总压和马赫数，可求得出口气流的静压为：

$$p_e = \frac{p^*}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_e^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = 1.237(\text{大气压})$$

因为这个压力比环境压力高，所以气流必须继续膨胀减压。

②为了求得气流膨胀后的转角，必须求得气流膨胀后的马赫数M_2。根据膨胀波是绝能等熵的过程，而膨胀后气流压力必须达到环境压力，因此可以求出气流膨胀后的马赫数为：

$$M_2=\sqrt{\frac{2}{k-1}\left[\left(\frac{p^*}{p_a}\right)^{\frac{k-1}{k}}-1\right]}=1.365$$

因此气流偏转角为：

$$\delta=\nu(M_2)-\nu(M_1)\approx 8^\circ-3^\circ30'=4^\circ30'$$

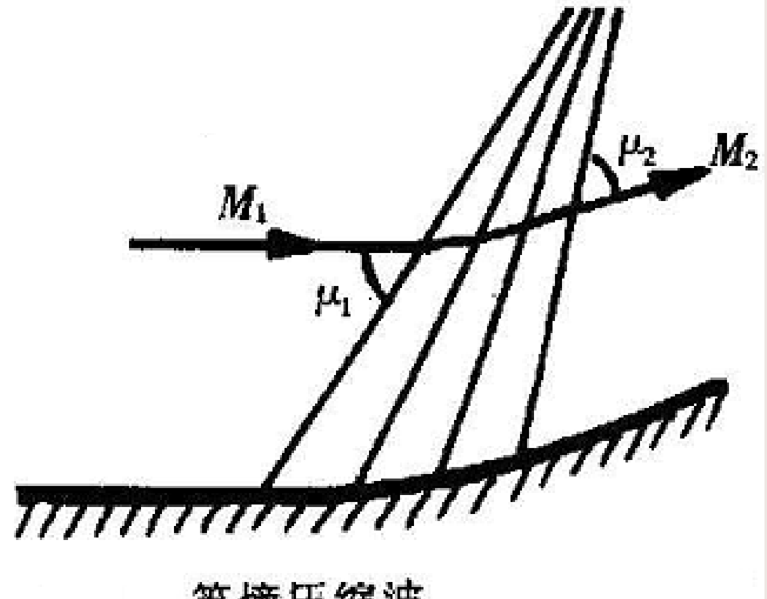
[说明]拉瓦尔喷管的作用是依靠气流加速产生推力的，当出口处产生膨胀时，表明气流在喷管内膨胀不足，因此这个工作状态下，喷管是损失掉能量了。常说这是喷管被截短了。

㈦气流绕凹曲面等熵压缩是膨胀波的逆过程，也可以用普郎特-梅耶膨胀波理论解决。

参见课本例题2。

需要特别指出，等熵压缩也称为微弱压缩，而且等熵压缩波最后会汇总在一起，形成强烈的压缩，那里

压缩不再是等熵的。



等熵压缩波

§2、激波(shock wave)理论

1. 激波的特征

当超音速气流流过大的障碍物时，气流在障碍物前受到急剧的压缩，压力和密度突然显著增加。所产生的压力扰动波以比音速大得多的速度传播，波面所至之处气流参数发生突然的变化，这种强压力扰动波称为激波或冲波。

气流通过激波时，速度下降，而压力、密度和温度增加。总温不变但总压降低。因为这是一个熵增过程，换言之是一个不可逆过程。

激波是由许多微弱扰动波迭加而成的，有一定强度的、以超音速传播的压缩波。

2、激波的分类

(1) 正激波

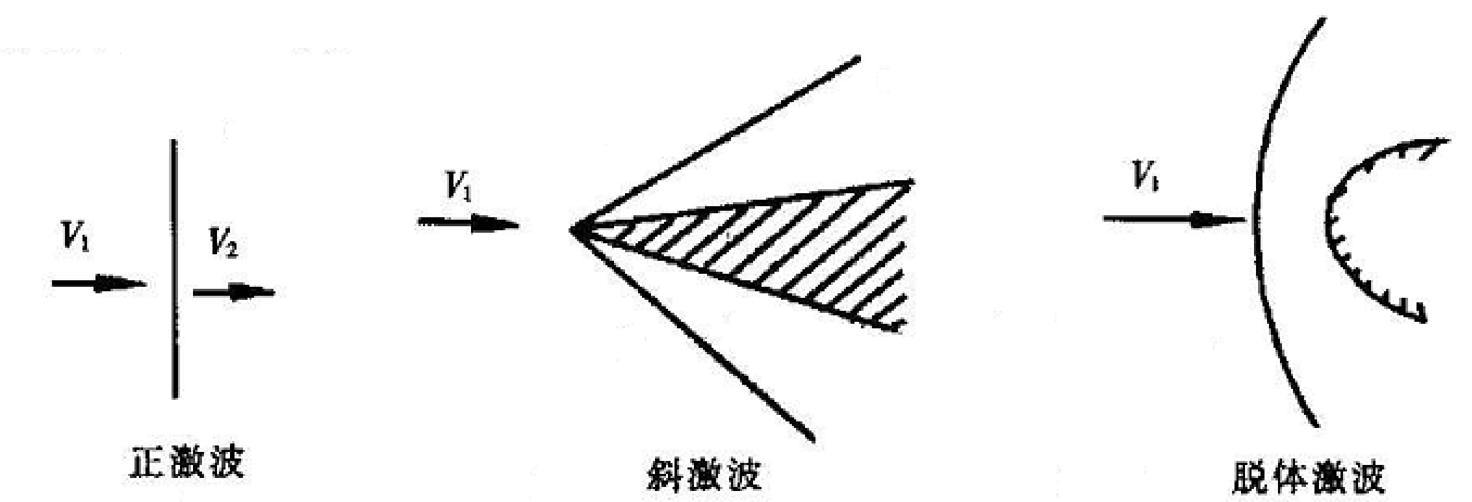
激波面与气流来流方向垂直，气流经正激波后不改变来流方向。

(2) 斜激波

激波面与气流来流方向不垂直，气流经斜激波后要改变流动方向。

(3) 曲激波(或称弓形激波、脱体激波)

由正激波（在中间部分）和斜激波系组成。



3. 激波的厚度

在无粘性不导热的理想气体中，激波成为无厚度的数学上的间断面，这在实际中不能实现。

在实际气体中，由于粘性和热传导的存在，在激波中必然形成一个极薄的过渡区，在其中各参数发生连续的变化。气体分子运动论证明，激波厚度与气体分子的平均自由行程（≈10^{-5}mm）同一数量级。各气体参数是在这个极小的激波厚度内连续地变化，所以也可以把激波看作是一个不连续的间断面。

4. 波阻

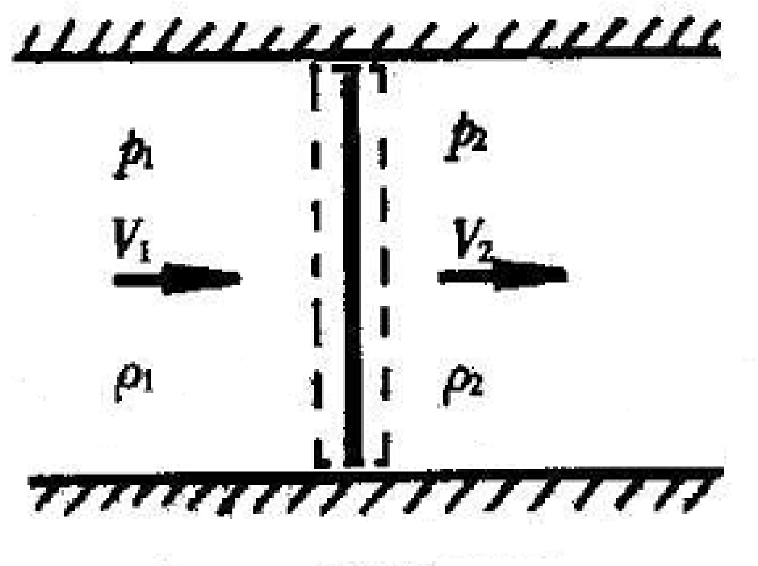
超音速气流经过激波后，气流中部分动能不可逆地转变为热能而损失掉，因而产生一种超音速气流所特有的阻力损失，称为波阻。气流通过正激波时波阻最大。

5、正激波参数计算

㈠基本方程

取相对坐标系，把直管内的激波当作静止的，这样是超音速来流穿过激波。波前参数是p_1、T_1、ρ_1、V_1；波后参数为p_2、T_2、ρ_2、V_2。

取包围激波的一个控制体，可以使用积分形式方程建立波前波后气流的基本方程。



正激波

思考：为什么不能用微分方程？

连续方程： $\rho_1 V = \rho_2 V_2$

动量定理：$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2$

能量方程：

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

状态方程：$p_1 = \rho_1 R T_1, p_2 = \rho_2 R T_2$

借助于上面这个一维流的气体动力学方程组，可以得到关于激波参数计算的四组公式。

它们分别是：Prandtl激波关系式；波前波后气流参数关系；Ranking-Hugioniut关系；总压损失关系式(或称熵增关系式)。

㈡正激波基本关系式之一——普郎特激波公式

$$\lambda_1\lambda_2 = 1 \text{ 或者 } M_2^2 = \frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{\gamma M_1^2-\frac{\gamma-1}{2}}$$

这个关系表明，正激波后气流总是亚音速的。

当 $M_1 \to \infty$，那么正激波后最小的马赫数 $M_2 \approx 0.378$。(γ=1.4)

【证明】用动量方程除以连续方程，得到

$$\frac{p_1}{\rho_1 V_1}+V_1=\frac{p_2}{\rho_2 V_2}+V_2 \quad \text{即} \quad \frac{p_1}{\rho_1}+V_1^2=(\frac{p_2}{\rho_2}+V_2^2)\frac{V_1}{V_2}$$

由于能量方程可写成

$$\frac{V_1^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1}=\frac{V_2^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_2}{\rho_2}=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{c_{cr}^2}{2}$$

即 $\frac{p_1}{\rho_1}=\frac{\gamma-1}{2\gamma}\left(c_{cr}^2\frac{\gamma+1}{\gamma-1}-V_1^2\right)$ $\frac{p_2}{\rho_2}=\frac{\gamma-1}{2\gamma}\left(c_{cr}^2\frac{\gamma+1}{\gamma-1}-V_2^2\right)$

把这两式代入前面一式，化简得

$$(V_2-V_1)V_1V_2=(V_2-V_1)c_{cr}^2$$

因为V_1=V_2的解是平凡解，所以忽略掉，即得

$$V_1V_2=c_{cr}^2 \quad \text{或者} \quad \lambda_1\lambda_2=1$$

把速度系数用M数代换掉，即得按马赫数表示的关系。

㈢正激波的激波关系之二——波前波后气流参数比与波前马赫数的关系

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{2}{(\gamma+1)M_1^2}+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$ ★

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2}$$ ★

$$\frac{T_2}{T_1}=1+\frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\frac{\gamma M_1^2+1}{M_1^2}(M_1^2-1)$$

$$\frac{M_2^2}{M_1^2}=\frac{1}{M_1^2}\frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2\gamma M_1^2-(\gamma-1)}$$

可见，波前波后参数之比只取决于波前M数。

从上面的关系式可以分析出：

①如果波前马赫数无限大，则压强比也是无限大。这意味着，来流越强，激波也越强。可以通过激波实现任意大的压缩。

②因为波前马赫数无限大时，密度之比有一个极限：$(\gamma+1)/(\gamma-1)$。所以通过激波不可能实现无限高密度的压缩。

③还可以得到总压比的关系式(请自己思考)。

㈣激波关系之三——Rankine-Hugoniut关系

这组关系描述了波前波后气流参数比之间的相互联系。

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{1-\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}\dfrac{\rho_2}{\rho_1}}{\dfrac{\rho_2}{\rho_1}-\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}} \qquad \frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{1+\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}\dfrac{p_2}{p_1}}{\dfrac{p_2}{p_1}+\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}} \qquad \frac{T_2}{T_1}=\frac{\dfrac{p_2}{p_1}\left(\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}+\dfrac{p_2}{p_1}\right)}{\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}\cdot\dfrac{p_2}{p_1}+1}$$

Rankine-Hugoniut关系式的重要性在于，它对于任何激波都是正确的。

㈤激波关系之四——激波的熵增关系

按照 $dh = TdS + \left(\dfrac{1}{\rho}\right)dp$

$$dS = c_p \frac{dT}{T} - \left(\frac{1}{\rho T}\right)dp = Rd\ln\left(T^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Big/ p\right)$$

$$S = R\ln\left(T^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Big/ p\right) + C = R\ln\left(\left(T^*\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Big/ p^*\right) + C$$

因为经过激波后，气流总压变化，而总温不变。所以

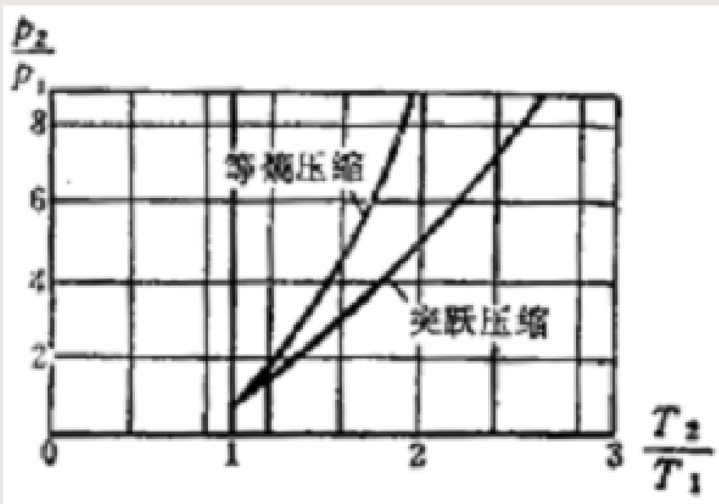
$$\Delta S = S_2 - S_1 = R\ln\left(\frac{p_1^*}{p_2^*}\right)$$

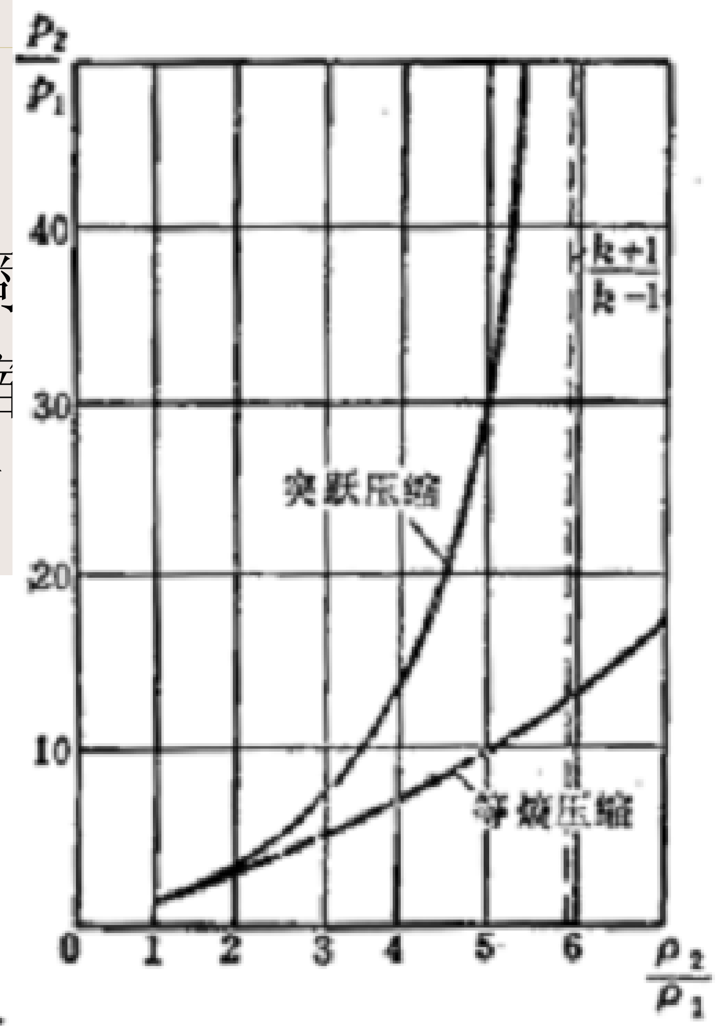
由于波后，气流总压下降，所以气流的熵必然增加。

㈥突跃压缩与等熵压缩的比较

图示出了突跃压缩和等熵压缩中 p_2/p_1、ρ_2/ρ_1 和 T_2/T_1 的变化关系。

可见：在同一压力比下，突跃压缩的温度比高于等熵压缩的温度比；而突跃压缩的密度比小于等熵压缩的密度比。



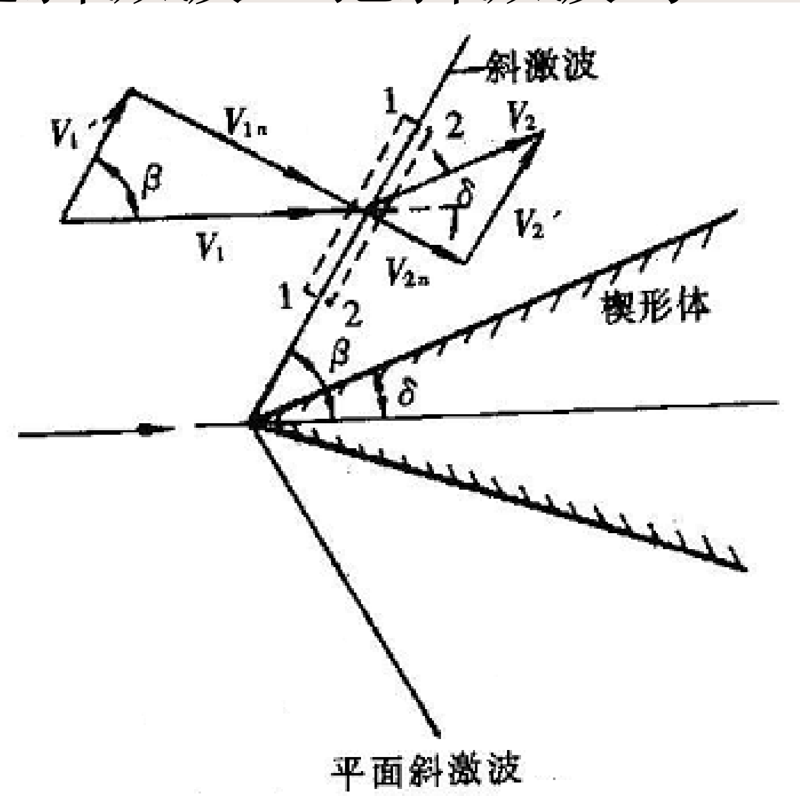


等熵压缩与突跃压缩的比较

6、斜激波

㈠斜激波与正激波的关系

超音速气流经过一个楔角为 δ 的楔形时，气流被迫转向了 δ ，如果超音速气流足够强，则在楔形的顶部产生一道斜激波，把斜激波与来流方向的夹角 β 称为**激波角**，而 δ 称为气流**偏转角(气流角)**。



按动量方程，可以证明气流沿切向的分速在波前波后是不变的(自己分析)。

而法向速度穿过激波时是变化的。这样气流的变化相当于以法向速度穿过正激波，而切向速度不变。因此气流参数的变化可以如下考虑：即在正激波的关系式中，如果遇到速度(包括马赫数或速度系数)，则用斜激波的法向分速代替之，就得到穿过斜激波后气流参数的变化。

因为波前波后气流的法向速度分别为：

$$V_{1n}=V_1\sin\beta \qquad M_{1n}=M_1\sin\beta$$

$$V_{2n}=V_2\sin\left(\beta-\delta\right) \qquad M_{2n}=M_2\sin\left(\beta-\delta\right)$$

因此有下面的斜激波关系式。

㈡斜激波的激波关系式：

1、波前波后气流速度

$$\lambda_{1n}\lambda_{2n}=1 \text{ 或者 } M_2^2\sin(\beta-\delta)=\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\sin^2\beta}{\gamma M_1^2\sin^2\beta-\frac{\gamma-1}{2}}$$

这个关系式表明，经过斜激波后气流的法向速度必定是亚音速的，因为波前气流法向速度必定是超音速的。但是波后气流的总速度可以是亚音速或者可以是超音速的，因为还取决于切向分速。

至于为什么斜激波前气流法向速度必定是超音速的，这可以从下面的压强比关系可以看出。

2、斜激波前后气流参数比与来流马赫数的关系

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{(\gamma+1)M_1^2\sin^2\beta}{2+(\gamma-1)M_1^2\sin^2\beta}$$

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2\sin\beta-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}=\frac{2\gamma}{\gamma+1}(\frac{V_{1n}^2}{c_1^2}-\frac{\gamma-1}{2\gamma})$$

$$\frac{T_2}{T_1}=1+\frac{2(k-1)}{(k+1)^2}\frac{kM_1^2\,sin^2\,\beta+1}{M_1^2\,sin^2\,\beta}(M_1^2\,sin^2\,\beta-1)$$

从压强关系式可知，由于 $p_2/p_1>1$

$$\frac{V_{1n}^2}{c_1^2}-\frac{\gamma-1}{2\gamma}>\frac{\gamma+1}{2\gamma}$$

即 $V_{1n}>c_1$ ，因此斜激波前法向速度必定是超音速的。

㈢气流偏转角与激波角的关系

对于斜激波的计算，最重要的就是确定这两个角度。通常知道一个而需要求另一个。

因为通过激波面的流量与沿波面的分速 V_τ 无关，故连续性方程可写为：

$\rho_1 V_{1n} = \rho_2 V_{2n}$ 即 $$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_{1n}}{V_{2n}} = \frac{tg(\beta-\delta)}{tg\beta}$$

但是 $$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M_1^2\sin^2\beta}{2+(\gamma+1)M_1^2\sin^2\beta}$$

从中可解出 $$\frac{1}{tg\delta} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\frac{M_1^2\sin^2\beta}{M_1^2\sin^2\beta-1}\right)tg\beta$$

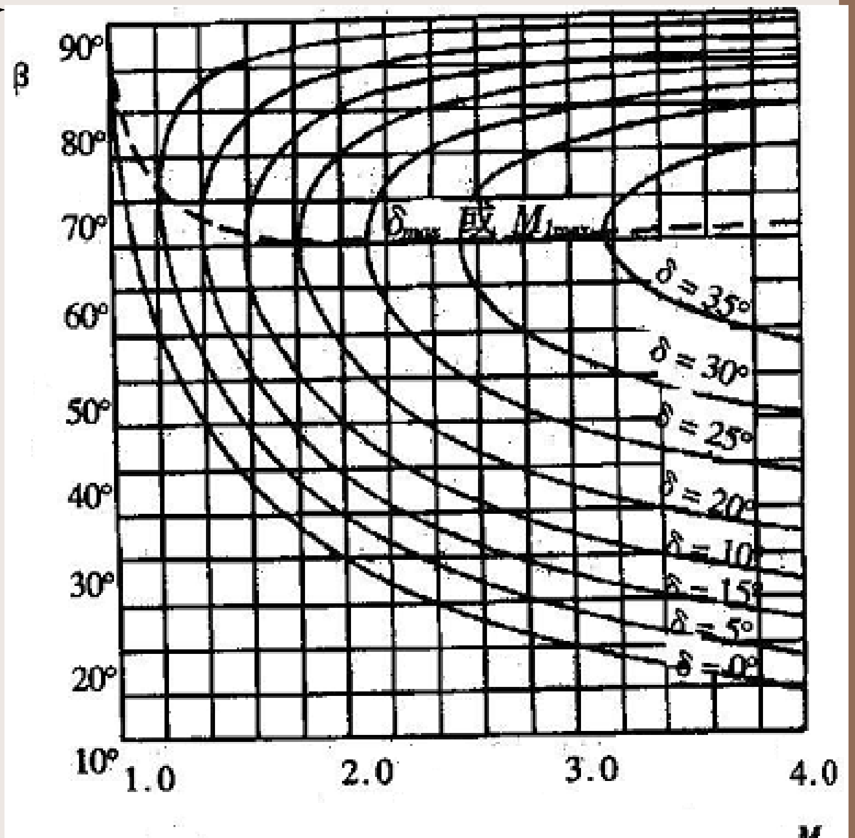
这就是斜激波的激波角 β 与气流偏转角 δ 、及波前马赫数 M_1 之间的关系。

【说明】

1、这个公式计算起来是困难的，但是可以通过查斜激波表或者斜激波图得到。

2、最重要的在于，这个表中一个M_1和一个δ对应了两个β。这两个解分别称为强解和弱解，分别对应了大的和小的β。

到底取哪个解，必须根据具体问题而定。



激波角β与波前气流马赫数M_1、气流折转角δ的关系

实验指出，这两道激波中较弱的一道最常发生，特别是尖头体前面的附体激波。但是如果下游压力极高，就有可能产生强激波解。

如果不能肯定到底是哪道激波，那么可以先按弱激波计算，再看看这个计算的结果跟下游的参数是否符合。

【例2】空气流过一个物摩擦的表面并偏转$\delta=15^{\circ}$，已知M_1=3， p_1=101325N/m^2，T_1＝300K。假定产生一道弱激波，试求：波后气流的马赫数、压强、密度和速度。

【解】根据来流M数及气流偏转角，可以查得激波角为：$\beta=32.2404^{\circ}$

利用激波角和来流马赫数，可以得到波前波后气流参数比，比如

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2\sin\beta-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}=2.8216$$

因此 $p_2=p_1\times2.8216=285894\,N/m^2$

其他参数相仿可求出。

⑷脱体激波

对于一个给定的来流马赫数M_1，气流的偏转角 δ 有一个极限值δ_{max}。超过了这个极限值后，激波不再附体而离开物体形成脱体激波。因为气流角对应了激波角，所以对应地有一个极限的激波角β_{max}

$$\sin^2\beta_{max}=\frac{1}{\gamma M_1^2}\left\{\frac{\gamma+1}{4}M_1^2-1\right.$$
$$\left.+\left[(\gamma+1)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2+\frac{\gamma+1}{16}M_1^4\right)\right]\right\}$$

对给定的M_1，按此式求出最大的激波角，再按激波角与气流角关系求出最大的气流偏转角。

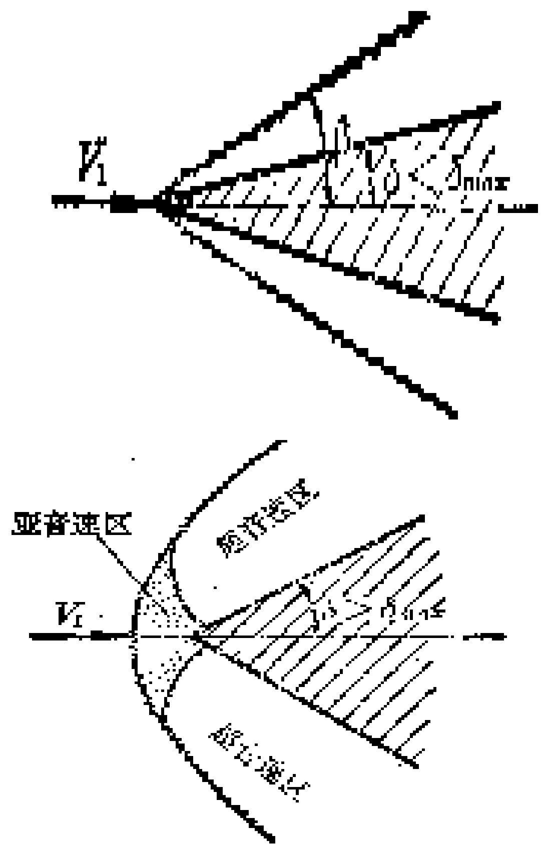


图 7-30 超音速气流流过楔形物（$\delta>\delta_{max}$）

【说明】

1、一旦激波脱体，那么便不能再使用斜激波关系。

2、激波脱体后，物体正前方一段的激波可以当作正激波，因此，这个区域后方的气流是亚音速。而激波的外伸段是斜激波，因此，其后面的气流可能是超音速也可能是亚音速。

3、即使来流是理想无旋的，但是脱体激波后面的气流也是有旋的，这是由著名的Crocoo定理表明的。

$$T\nabla S+\vec{V}\times\left(\nabla\times\vec{V}\right)=\nabla h_0+\partial\vec{V}/\partial t$$

7、膨胀波与激波的反射与相交

经常会遇到膨胀波、激波与固体壁面、自由边界的相交，此时激波会从壁面反射。有时不同地点产生的激波与激波、激波与膨胀波、膨胀波与膨胀波会相遇，产生了反射或相交的现象。

除了膨胀波、激波与壁面或自身相交或反射的现象外，还存在膨胀波、激波与边界层相交的现象。

对于膨胀波、激波的反射与相交，首先必须清楚的是，产生的结果是什么；其次是如何计算产生的结果。

斜激波和膨胀波会从壁面反射，使反射激波和膨胀波下游的流动平行于壁面。

一般而言，由激波、膨胀波相交等引起的激波相互作用可用下面的条件来描述：即流动方向必须适应固体壁面边界或者连续性要求。

激波或者膨胀波相互作用的结构比较多。首先必须清楚，无论使斜激波或者膨胀波，如果气流所需要的偏转过大，或者斜激波的强度太弱，那么就会产生滑移或者马赫反射。

所谓滑移，是指激波、膨胀波与壁面三者相互作用后，流场中出现了速度滑移线(面)。在这个分界线(面)的两侧，气流静压相等，速度方向一致，但是速度大小、温度、密度、音速等其他参数都不再相等。

所谓马赫反射，是指斜激波无法延伸到所需要的尽头，而是在一段斜激波后以一段正激波结束。

因此当斜激波遇到边界时，有三种可能发生：激波反射、马赫反射和激波消失。

当膨胀波遇到边界时，有两种可能发生：膨胀波反射、膨胀波消失。

而当激波与膨胀波，或者它们之间相互作用时情况复杂得多。

激波与膨胀波的组合

在超音速流动中，把激波与膨胀波组合起来，可以得到许多实际的复杂外形的流动图象。如下图所示范的几种绕简单物体的流动。

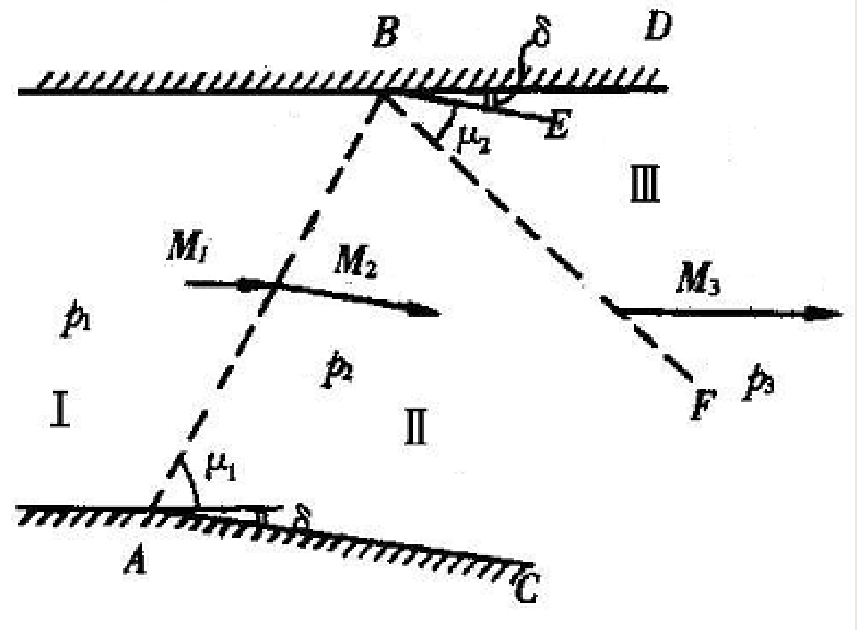
在某些区域中这些简单波会发生相互作用并且发生弯曲(特征线不再是直线)，使简单波的解无效，必须用完整的方程组求解。但是对一些简单的流动，可以借助于小扰动理论或者特征线方法来求解。

激波、膨胀波相互作用的问题在内流中的典型例子是象塞式喷管或者超音速进气道。

㈠膨胀波在固体壁面上的反射

超音速气流在管道内的A点产生一道膨胀波，这道波在上壁面处被反射。

因为气流通过A点的膨胀波后是沿着下壁面加速的，所以这道波后的气流将不平行于上壁面，因此为了要在反射点后气流再沿着上壁面，气流必须向上壁面偏转。因此这道反射波必然是膨胀波。



膨胀波在固体壁面的反射

因为为实现反射后气流沿上壁面，所以反射波在上壁面处的偏转仍然是 δ 。但是注意，对第一道波，P-M角为负；而第二道波则为正。

因此计算方法是：

按照P-M膨胀波方法
计算第一道波后的气流参数

↓

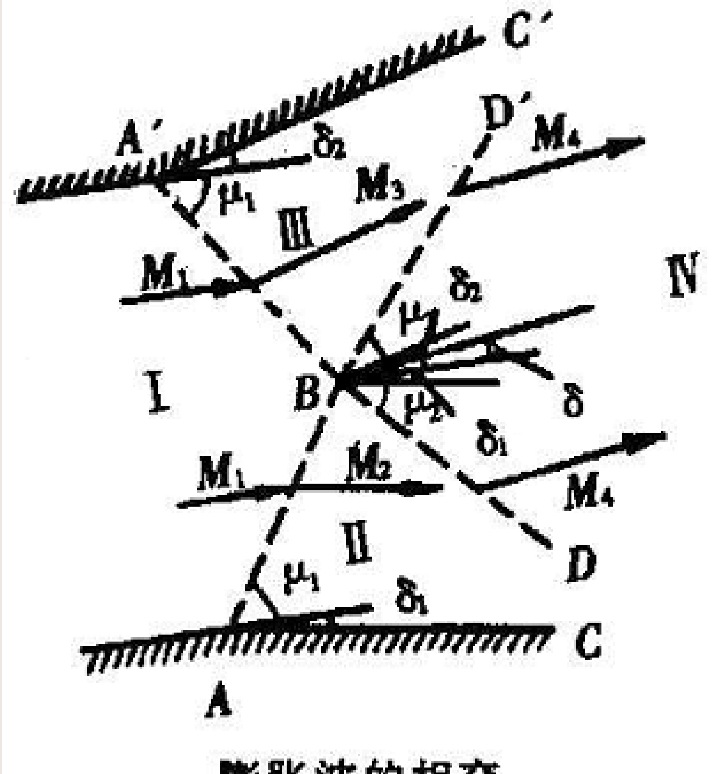
再按照P-M膨胀波方法
计算第二道波后的气流参数

㈡膨胀波的相交

A点和A'点发出的两道偏转角不一致的膨胀波后，气流流动方向不一致，这样当它们在B点相遇时，就会产生膨胀波的相交。经过相交之后，产生新的波系后，气流的流动方向必须保持一致。

因为II区和III区的气流沿相反方向流动，所以为了在B点后不产生真空，气流必须相向偏转，因此产生的必定是膨胀波。

经过相交波后，气流的流动方向保持一致。



膨胀波的相交

对于相交的波系，关键的问题是不能立即确定气流偏转角。到底偏转多大程度，是由相交之后气流在交汇面上的性质决定的。

相交波系在交汇面上的基本约束是：

两侧气流的压强相等；流动方向一致。

对于膨胀波，因为波前波后气流的总温总压不变，而反射波又是膨胀波，所以气流总参数仍不变。所以实际上反射后的气流参数是一致的，即汇成了一股流动。因此相交波的偏转角可从几何关系得出。

因为来流与最终气流的方向对于上下两股流都是一样的，因此气流从I、II、IV和从I、III、IV流动的总偏转角相等，如设这个角度为 δ ，则从I、II、IV的气流偏转为 $2\delta_1+\delta$ ，而从I、III、IV的气流偏转为 $2\delta_2-\delta$ ，因此

$$2\delta_1+\delta=2\delta_2-\delta$$

即 $\delta=\delta_2-\delta_1$

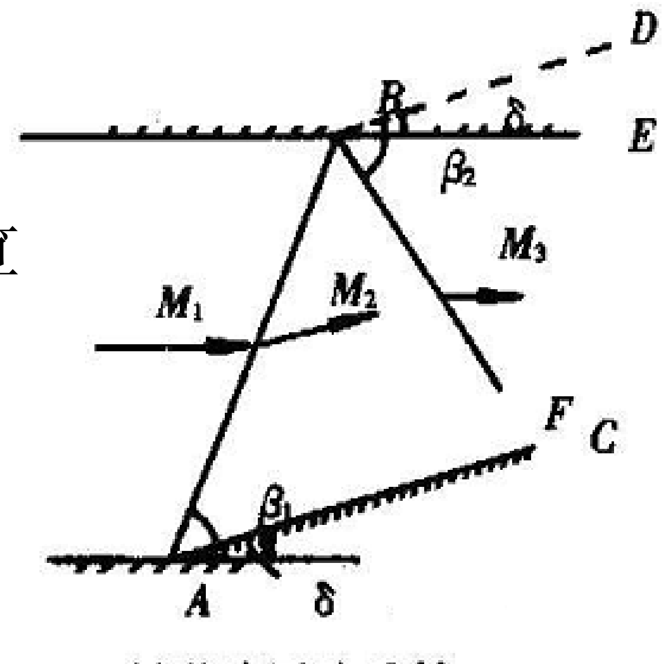
所以，相交产生的膨胀波气流从II或III区进入IV区时，分别再次偏转了δ_2 和 δ_1 。有了这些角度，便可进行相交计算。

也可以仿照激波的相交进行叠代计算。

㈢激波的反射

激波因为遇到上壁面，而进行反射。由于头道激波后气流方向沿下壁面，因而在上壁面处气流的通道受阻，必须产生另一道激波，调整气流使之平行于上壁面。所以反射波是仍是一道斜激波。

因为反射激波的偏转角仍然是 δ ，所以很容易计算反射激波后的气流参数。



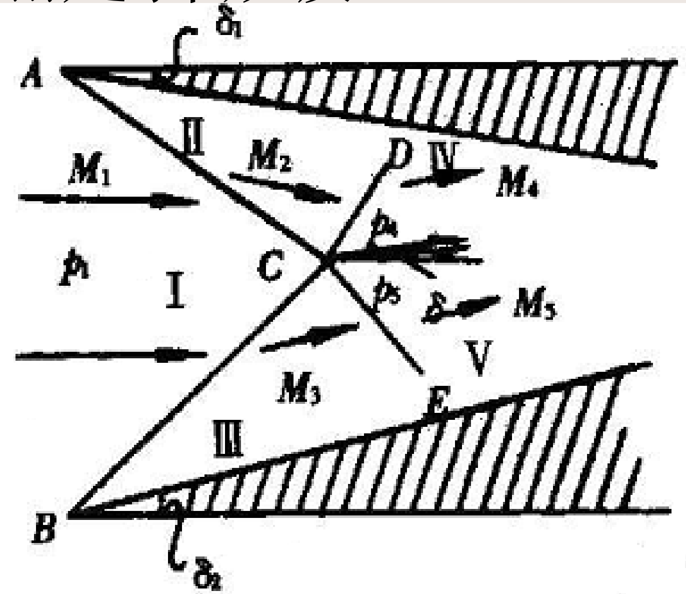
斜激波固壁反射

⑷斜激波的相交

(1)异侧激波的相交

两道异侧的激波在C点相遇，因为它们是相向流动的，相遇通道受到限制，所以必然是产生激波，经过激波后气流流动保持平行。所以异侧斜激波的相交仍然是斜激波。

因为经过激波之后，气流的总压不再相等，所以在相交之后的气流，在交汇面的两侧不再相等，而是形成了滑移层。



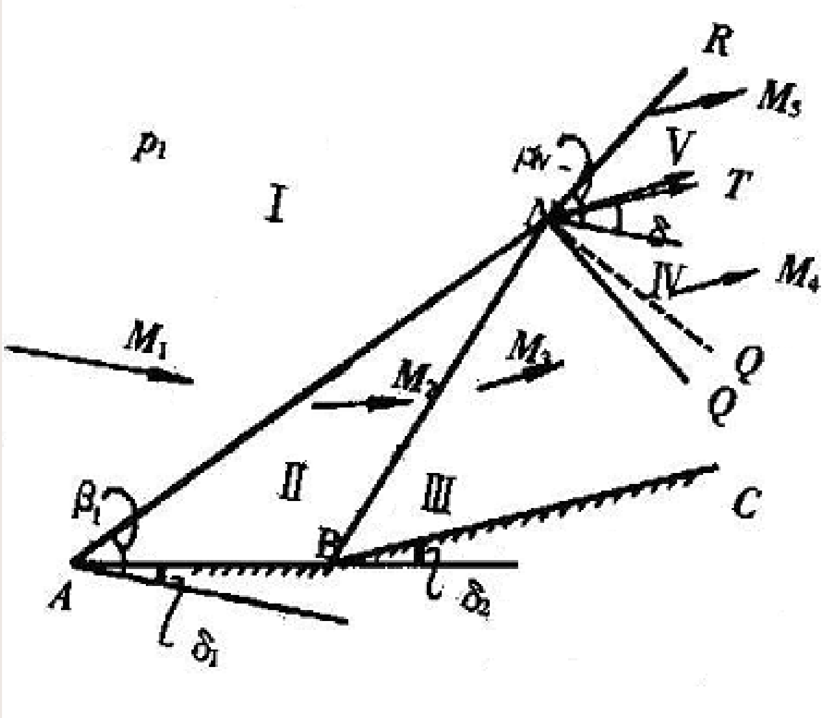
异族激波相交

滑移层的两侧，仍旧是压强相等，流向平行，但是流速和温度等其他参数不再相等。

这个时候，再反射的激波已经不能象膨胀波相交那么处理再偏转角，因此计算就困难得多。需要根据滑移层两侧的约束条件，进行试算。

(2)同侧激波的相交

分别偏转了 δ_1 和 δ_2 的同一侧产生的两道激波，在上方交汇时，因为气流压力和流向都不一致，因此产生新的更强的激波。



同侧激波的相交

显然这道强激波后的气流与III区气流参数一般是不一样的，这样，为了调整气流，在交汇点除了两波叠加产生更强的激波外，通常还会伴随一道波。这道波可能是膨胀波也可能是一道弱激波。经过这道弱激波后，贴近壁面的气流将保持与壁面平行，而在两道反射波之间，形成一个滑移层。滑移层两侧，气流压力相等，流向一致，但其他参数不同。

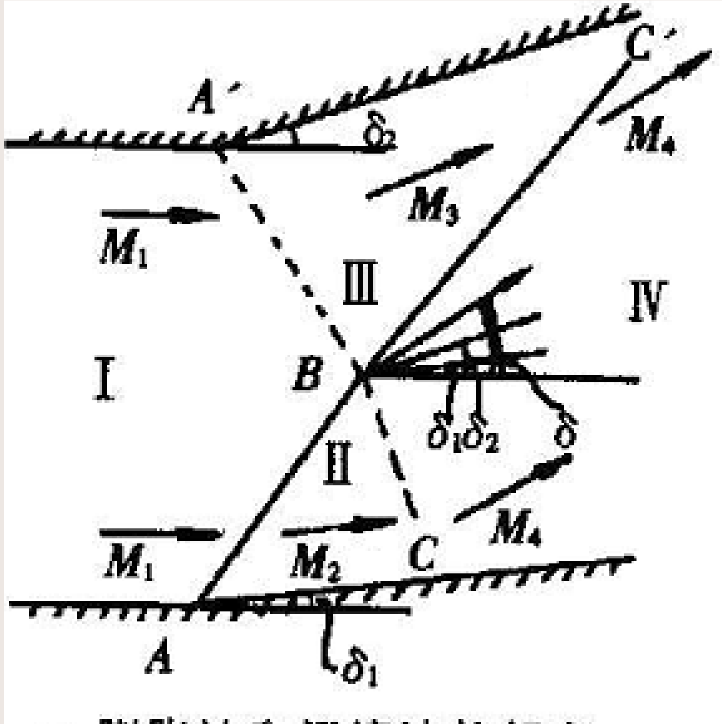
至于反射形成的弱波是膨胀的还是压缩的，可以通过假设气流在强叠加波后气流沿波面，进行试算。如果按此算得的气流压力高于III区压力，则表面需要的是一道压缩波来提高气流压力；否则就是膨胀波。

㈤激波与膨胀波的相交

激波与膨胀波的相交后，有两种可能。其一是产生一道激波与一道膨胀波，但也可能是两道激波。

通常情况下，都会有滑移线的存在。

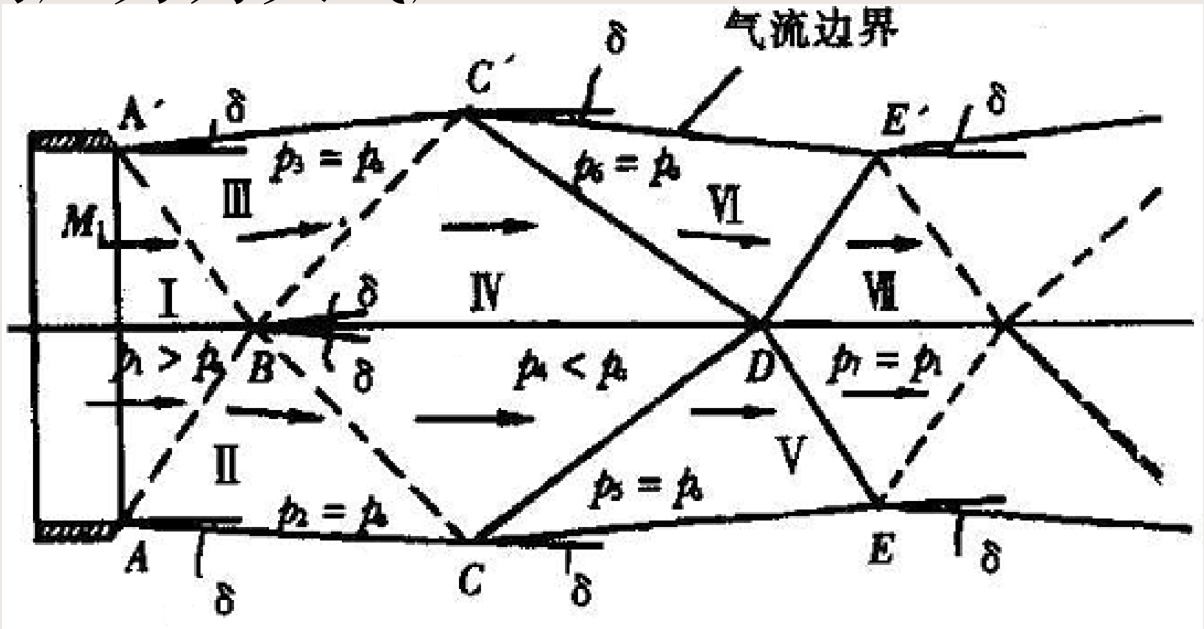
课本上介绍了对等熵压缩波与膨胀波相交的讨论，可自己学习。



膨胀波和压缩波的相交

㈥膨胀波、激波在自由边界上的反射

下图是超音速喷管出口气流的流动情况之一。喷管出口处先产生了一道膨胀波，上下两道膨胀波在中轴线上相交后，产生两道次膨胀波。我们已经知道，出口气流膨胀后(即II、III区)的压力为大气压。



膨胀波在自由边界的反射

虽然经过头道膨胀波后气流压力与环境压力相等，但是流动速度向外偏转了δ，因此在交汇点下游将产生真空，为了弥补它，必然在相交点上产生两道膨胀波，经过此膨胀波后气流再次偏转了δ角后，流动方向平行。

气流虽然平行，但是这里(即IV区)的压强却又比环境压强低。因此为了适应外界环境压力，必然在自由边界上产生反射的压缩波，使得波后气流压力上升到环境压力，因此膨胀波在自由边界上的反射结果是斜激波。

斜激波后气流压力等于环境压力，但流动方向向内，结果在中轴线上再反射成斜激波，经过这个斜激波后的区域(即VII区)，气流压力高于环境压力(因为是从环境压力再经过压缩的)，所以斜激波在自由边界上再反射成膨胀波。

总之，

- 膨胀波从固体壁面的反射仍然是膨胀波。
- 膨胀波从自由压力边界的反射是斜激波。
- 膨胀波的相交仍然是膨胀波。

- 一道斜激波从固体边界上反射为另一道斜激波，这是规则反射；如果不能附体，就将形成马赫反射。

  规则反射下，反射激波的转折角跟头道波的符号相反。

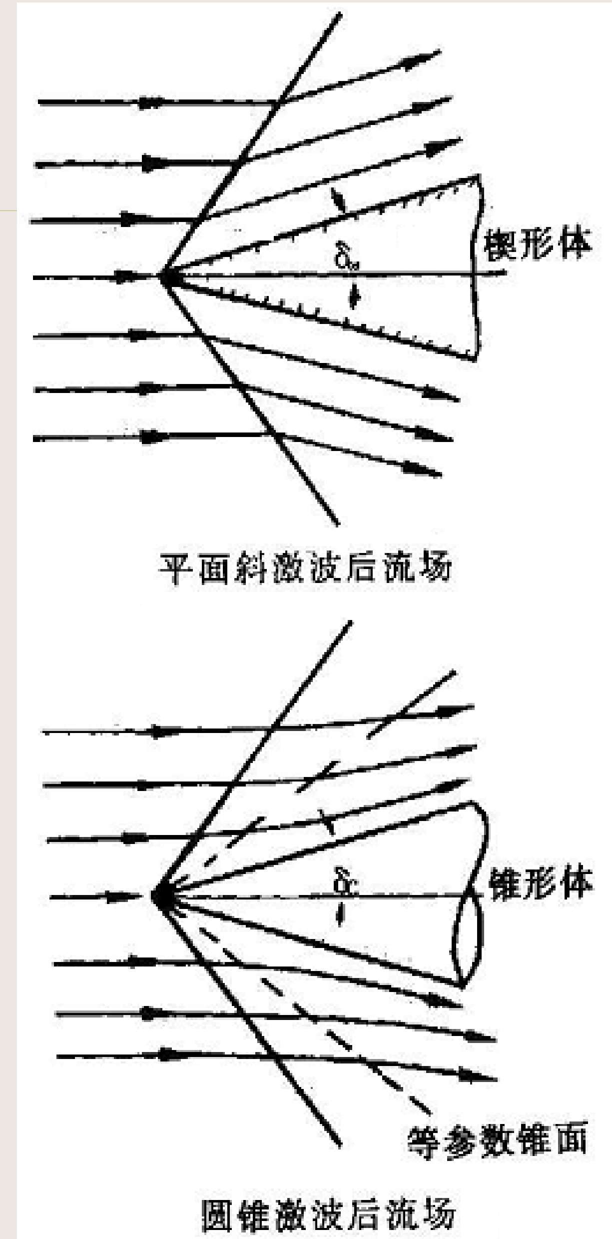
  马赫反射下，有滑移线。滑移线两侧，某些气流参数是不连续的。关于这点，尚未研究得很好。

- 两道斜激波的相交分为规则相交和马赫相交两种。无论如何，都有波后气流分区的问题和滑移线存在。在波后区域中，最基本的要求是静压相等，流向一致，其它的参数就将是不同的。
- 从自由压力边界处的反射为一道膨胀波
- 激波与膨胀波相交时，通常是产生激波+膨胀波，但是有时也可能是两道更弱的激波。

8、圆锥激波

当锥顶不太大同时来流马赫数足够强时，将产生附体的锥形激波。

圆锥激波的波后气流参数与平面斜激波基本相同，但是有一个重要差别，就是气流的偏转角不再是锥顶的半角，而是比之小的一个角度，其基本理由是在圆锥激波中，建立偏转角与激波角的连续方程是与二维情况不同。

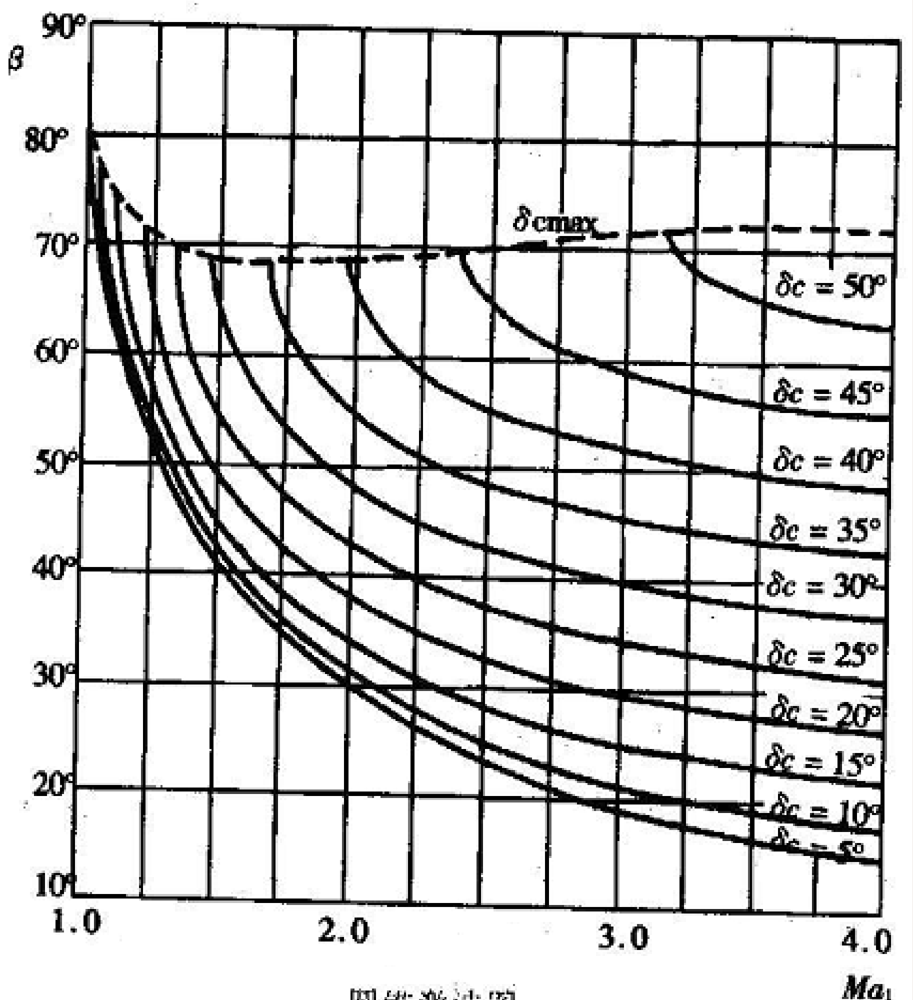


平面斜激波后流场

圆锥激波后流场

圆锥激波的气流偏转角和激波角的关系虽难于计算，但是可以通过查圆锥激波图表得到。

在给定的气流来流马赫数M_1和圆锥体的半顶角 δ_c 后，从右边所示范的图中便可查得激波角 β 。再根据斜激波理论计算其他参数。



圆锥激波图

关于气体动力学，特别是激波与膨胀波的理论，可见文献：

《气体动力学》，左克罗、霍夫曼著(两卷)

《可压缩流动的动力学和热力学》，夏皮罗著

作业：p223－224

Ex.10-2

Ex.10-4

Ex.10-11