第四章 相似原理与量纲分析

①第三章是理论研究方法，但除了极少数问题外，很难得到理论解析解，而必须借助于实验方法。

②实验研究方法有实物实验、比拟实验和模型实验三大类。

③实物实验是用仪器实测原型系统的流动参数，它对于较小的原型系统比较合适，对大型系统就很难；

比拟实验有水电比拟和水气比拟，是利用电磁场来模拟流场和用液体来模拟气体，实施起来也有诸多限制；

模型实验是最常用的实验方法，此法是在测试中用把原型按一定比例缩小后的模型，此外还可能要变更流体的性质和流动条件，等等。

④模型实验研究的理论指导基础是相似原理。具体实践方法是通过量纲分析.

⑤流动相似是几何相似的推广。

§1 流动相似原理

几何相似——对应边成同一比例；对应角相等。当边上有粗糙度时还要求粗糙度相似。

运动相似——①几何相似的两个流动系统中，对应点的速度大小成同一比例，方向相同。即流线是相似的。②几何相似未必运动相似。如同一模型的亚超音速流动。③速度相似，和几何相似，则加速度相似。

动力相似——①几何相似和运动相似的两个流场中，对应点处的作用的性质相同的力，其大小成同一比例，方向相同。②力相似，则力矩和其它与力相关的物理量也相似。

时间相似——流体流动所对应的时间间隔成比例。这是对非定常问题而言的，意思是相应的非定常时间尺度成比例。

其他相似——热力相似；化学相似等。

§2 相似准则与量纲分析

相似原理说明两个流动系统相似必须在几何相似、运动相似和动力相似三个方面都得到满足，二者才可以比拟。

但是实际应用中，并不能用这些定义来验证流动是否相似，因为通常原型流动的详情是未知的。这就产生一个问题：有什么其它办法能保证两个流动系统相似呢？有，这就是相似准则。利用相似准则，不必详细判断流场各点的几何、运动和动力量是否相似，而直接可断言流动是否相似。

1、量纲

㈠量纲和无量纲数

没有单位即没有量纲的量称为无量纲量。无量纲量有两种，一种是自然无量纲量，如e，另一种是由一定物理量组合起来的。

㈡量纲和谐原理

只有量纲相同的物理量才能相加减，所以正确的物理关系式中各相加减的项必须是量纲相同的，等式两边的量纲也是一样的。这就是量纲和谐原理。

2、相似准则

①两个相似的流动，其各物理量的相似比例尺之间相互制约。[举例-略]

由于这些比例尺是两个流动对应物理量的比例，因此说明了两个相似的流动，其对应物理量之某些组合是相等的。并且可以呈现无量纲的组合。这种一个流动的物理量的无量纲组合，称为流动的无量纲数或相似准则数。

②相似原理说，两个流动相似的充分必要条件是由决定这两个流动的物理规律中导出的无量纲数相等。

这些无量纲数称为相似准则(数)。一个流动现象中可以组合出无数个无量纲数，但是只有有限个数的是独立的。

寻找这些独立的无量纲数是相似分析或量纲分析的核心内容。

决定一个流动的物理规律有两种。一种是可以写出决定这个流动规律的物理方程和定解条件。第二种是无法写出其物理方程，但是可以知道决定这个物理问题的物理量。

相似原理表明了，对第一种情况，可以从其物理方程和定解条件中导出其无量纲数，只要两个流动的无量纲数一样，则这两个流动相似。反之也然——即两个相似的流动，其物理方程和定解条件必一样，并且其相似准则数相等。对第二种情况，则可以从其相关联的物理量中导出相似准则数，当它们相等时，就可以保证两个流动相似。

[粘性不可压缩流动的相似分析]

为简单起见，设流体受重力作用，写出以z方向的N-S方程来导出粘性不可压缩流体流动相似准则。

以下标1表示原型物理量，以下标2表示模型物理量，则原型和模型在z方向的N-S方程为：

$$\frac{\partial v_{1z}}{\partial t_1}+v_{1x}\frac{\partial v_{1z}}{\partial x_1}+v_{1y}\frac{\partial v_{1z}}{\partial y_1}+v_{1z}\frac{\partial v_{1z}}{\partial z_1}=-g_1-\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial z_1}+\frac{\mu_1}{\rho_1}\left(\frac{\partial^2 v_{1z}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_{1z}}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 v_{1z}}{\partial z_1^2}\right)$$

$$\frac{\partial v_{2z}}{\partial t_2}+v_{2x}\frac{\partial v_{2z}}{\partial x_2}+v_{2y}\frac{\partial v_{2z}}{\partial y_2}+v_{2z}\frac{\partial v_{2z}}{\partial z_2}=-g_2-\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p_2}{\partial z_2}+\frac{\mu_2}{\rho_2}\left(\frac{\partial^2 v_{2z}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 v_{2z}}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2 v_{2z}}{\partial z_2^2}\right)$$

根据流动相似条件，若模型与原型相似，则两系统对应点上的各种参量之比分别有相同的相似比例尺，即

几何相似：$x_1 = C_l x_2, y_1 = C_l y_2, z_1 = C_l z_2$

时间相似：$t_1 = C_t t_2$

运动相似：$v_{1x} = C_v v_{2x}, v_{1y} = C_v v_{2y}, v_{1z} = C_v v_{2z}$

动力相似：$p_1 = C_p p_2, g_1 = C_g g_2$

其他相似：$\rho_1 = C_\rho \rho_2, \mu_1 = C_\mu \mu_2$

将上述各量代入原型方程，把原型方程化为以模型参量和相似比例尺表示，则有

$$\frac{C_v}{C_t}\frac{\partial v_{2z}}{\partial t_2}+\frac{C_v^2}{C_l}\left(v_{2x}\frac{\partial v_{2z}}{\partial x_2}+v_{2y}\frac{\partial v_{2z}}{\partial y_2}+v_{2z}\frac{\partial v_{2z}}{\partial z_2}\right)$$

$$=-C_g g_2-\frac{C_p}{C_\rho C_l}\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p_2}{\partial z_2}+\frac{C_\mu C_v}{C_\rho C_l^2}\frac{\mu_2}{\rho_2}\left(\frac{\partial^2 v_{2z}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 v_{2z}}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2 v_{2z}}{\partial z_2^2}\right)$$

两边同除C_v^2/C_l，

$$\frac{C_l}{C_v C_t}\frac{\partial v_{2z}}{\partial t_2}+v_{2x}\frac{\partial v_{2z}}{\partial x_2}+v_{2y}\frac{\partial v_{2z}}{\partial y_2}+v_{2z}\frac{\partial v_{2z}}{\partial z_2}$$

$$=-\frac{C_g C_l}{C_v^2}g_2-\frac{C_p}{C_\rho C_v^2}\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p_2}{\partial z_2}+\frac{C_\mu}{C_\rho C_v C_l}\frac{\mu_2}{\rho_2}\left(\frac{\partial^2 v_{2z}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 v_{2z}}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2 v_{2z}}{\partial z_2^2}\right)$$

比较模型方程和原型方程，可见只要方程中的各相似比例尺满足下列条件：

$$\frac{C_l}{C_v C_t}=\frac{C_g C_l}{C_v^2}=\frac{C_p}{C_\rho C_v^2}=\frac{C_\mu}{C_\rho C_v C_l}=1$$

则原型方程中的各相似比例尺就可以消去，于是变得和模型方程一样的形式。这意味着，只要两个系统的边界条件和初始条件也相似的话，则一旦获得了模型方程的解，就可以按比例关系得到原型系统的各个参数，而不必去求原型方程。由于两系统的参数符合几何相似、运动相似和动力相似，所以两个系统必然是相似。

因此上式就是粘性不可压流体在重力场中流动的相似的充要条件。

用L、t、V表示流动中任意一个长度、时间、速度(常把这样的量成为特征量)。把物理量代回这个连等式，即有

$$\left(\frac{L}{Vt}\right)_1=\left(\frac{L}{Vt}\right)_2 \qquad \left(\frac{gL}{V^2}\right)_1=\left(\frac{gL}{V^2}\right)_2$$

$$\left(\frac{\mu}{\rho VL}\right)_1=\left(\frac{\mu}{\rho VL}\right)_2 \qquad \left(\frac{p}{\rho V^2}\right)_1=\left(\frac{p}{\rho V^2}\right)_2$$

这表明，两个流动中的这些物理量的组合满足相等关系就是两个流动相似的充分必要条件。因此这些组合量就是判断流动相似的准则。

推而广之，任何两个流动相似都可以得出相仿的这些无量纲组合量出来。只要它们相等，流动必相似；反之也然。这个结论，就是相似原理的主要内容。

前面导出的四个无量纲组合量会出现在很多流动问题中，因此特别申明它们：

◎ $$Sh = \frac{L}{Vt}$$

称为Strulhoul数。它是与时间有关的相似准则数，其物理意义是非定常力与惯性力之比。在定常流动中不需要考虑它，但在非定常问题中，这是一个重要的参数。

◎ $Fr = \frac{gL}{V^2}$

Froud数，刻画了质量力的影响。其物理意义是流体所受的质量力与惯性力之比。在描述有自由表面的流动如潮汐流动、液体表面波动等问题中有重要作用。但对于不考虑重力的问题，则不需要考虑它。

更广泛的，如果流体承受的不是重力，而是任一质量力F(单位质量流体)，则Fr数可以改为

$$Fr = \frac{FL}{V^2}$$

◎ $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho VL}{\mu} = \dfrac{VL}{\nu}$

Reynolds数，是粘性影响的体现。其物理意义是流体所受的惯性力与粘性力之比。在研究管道流动、飞行器阻力、浸没在不可压流体中的物体阻力及边界层流动问题等问题中，这是非常重要的一个物理参数。

Re数中特征速度和特征长度常常在不同的问题中取不同的量。比如管道中，常用半径或直径来定义Re数，而在绕流问题中，常取物体的特征长度。

◎ $Eu = \dfrac{p}{\rho V^2}$

Euler数，是与压力有关的相似准则数。其物理意义是压力与惯性力之比。Euler数常常用于描述压力对流速分布影响较大的流动，如空化、气泡现象。

考虑压降的问题(如管内流动时，也可取压降代替压强)。

上述四个无量纲准则数是粘性不可压缩流体中出现的。对于其他不同条件的流动，还可能有另外的相似准则。比如对于高速流动，密度随压力的变化较明显，必须考虑可压缩性的影响，此时Mach数是重要的相似准则数。在表面张力重要的问题中，则有Weber数出现。在旋转大气中，则有Rossby数和Ekman数。

3、量纲分析

对于无法建立微分方程的问题，可以通过量纲分析法来导出其相似准则。量纲分析法包括Rayleigh法和Buckingham法。

Rayleigh法——此法的前提是影响流动现象的变量之间的函数关系是幂函数乘积的形式，求解这个函数关系式的具体步骤是：

①确定影响流动的重要物理参数，并假设它们之间的关系是幂函数乘积形式；

②根据量纲和谐原理，建立各物理量的幂指数的联立方程式；

③解此方程式求得各物理量的指数值，代入所假定的函数关系式中，得到无量纲（相似准则数）之间的函数关系式；

④通过模型实验，确定函数关系式中的待定常数和具体的函数形式。

[例1]颗粒在流体中的沉降速度

直径为d的固体球形颗粒在无限大静止流体中自由沉降，已知影响沉降速度的有流体粘度μ和密度ρ，颗粒与流体的密度差Δρ，求颗粒的沉降速度。

[解]根据题意，有 $v_s = f\left(d_s, g, \mu, \rho, \Delta\rho\right)$ (a)

按照Rayleigh方法，设 $v_s = K d_s^a g^b \mu^c \rho^d \Delta\rho^e$

式中K为常数。以质量M、长度L和时间T作为基本量纲，得到量纲等式。

$$[M^0 L^1 T^{-1}] = [L^a][L^b T^{-2b}][M^c L^{-c} T^{-c}][M^d L^{-3d}][M^e L^{-3e}]$$

按照量纲和谐原理，两边关于M、L、T的量纲的方次应该相等，于是有

$$\begin{cases} 0 = c + d + e \\ 1 = a + b - c - 3d - 3e \\ -1 = -2b - c \end{cases}$$

解此方程式（以d，e为参数），得到

$$a = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(d + e), b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(d + e), c = -(d + e)$$

代回(a)式，得

$$v_s = K d_s^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(d+e)} g^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(d+e)} \mu^{-(d+e)} \rho^d \Delta\rho^e$$

整理，得到

$$\mathrm{Re}=\frac{d_s v_s \rho}{\mu}=KGa^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(d+e)}\left(\Delta\rho/\rho\right)^e$$

这里的 $Ga=d_s^3\rho^2 g/\mu^2$ 称为Gallileo数。

[说明1]最后得到的形式中的K、d和e是必须从实验中得出的。

[说明2]Rayleigh方法重要的是不要把对流动有重要影响的参数遗漏，也不应该包含无关紧要的参数，否则使关联式变得太复杂。通常，Rayleigh方法只适用于影响因素较少的简单流动问题。

Buckingham方法——其基本原则是：若某一物理过程需要n个物理参数，且这n个物理参数涉及r个基本量纲，则此物理过程可用n-r个无量纲数来描述，这些无量纲的数称为π项。其数学表达式为

$$f\left(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_{n-r}\right)=0$$

式中每一个π项都是独立的、无量纲的数，由若干物理参量组合而成。

这个原则也称为Buckingham π定理。

π 项的基本物理参数的选取原则是：

①r个基本物理参数必须包含r个基本量纲；

②所选择的基本物理参数至少应包含一个几何特征参数、一个流体性质参数和一个流动特征参数；

③非独立变量不能作为基本物理参数。

[例2]圆管内不可压缩流动的压力降 Δp。

已知流动所涉及的物理参数包括压力降 Δp ，圆管长L，圆管直径D，管内粗糙度e，流速v，流体密度 ρ 和流体粘度 μ 。

[解]根据题意，有

$$f_1(\Delta p, v, L, D, e, \rho, \mu) = 0$$

上式中n=7，因所涉及的基本量纲为M，L，T，故r=3，$n-r$=4，可得

$$f_2(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0$$

现选取D、v、ρ作为基本物理参数，则有

$$\pi_1 = \Delta p D^{a_1} v^{b_1} \rho^{c_1}$$
$$\pi_2 = L D^{a_2} v^{b_2} \rho^{c_2}$$
$$\pi_3 = e D^{a_3} v^{b_3} \rho^{c_3}$$
$$\pi_4 = \mu D^{a_4} v^{b_4} \rho^{c_4}$$

根据量纲和谐原理，以上各式等号左右的M，L，T的指数对应相等，故有

$$\begin{cases} 0 = 1 + c_1 \\ 0 = -1 + a_1 + b_1 - 3c_1 \\ 0 = -2 - b_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = c_2 \\ 0 = 1 + a_2 + b_2 - 3c_2 \\ 0 = -b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = c_3 \\ 0 = 1 + a_3 + b_3 - 3c_3 \\ 0 = -b_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = 1 + c_4 \\ 0 = -1 + a_4 + b_4 - 3c_4 \\ 0 = -1 - b_4 \end{cases}$$

解这些方程组，可得到

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = -2, \\ c_1 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = -1 \\ b_2 = 0\ , \\ c_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_3 = -1 \\ b_3 = 0\ , \\ c_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_4 = -1 \\ b_4 = -1 \\ c_4 = -1 \end{cases}$$

故有

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho v^2} = Eu, \pi_2 = \frac{L}{D}, \pi_3 = \frac{e}{D}, \pi_4 = \frac{\mu}{\rho v D} = \frac{1}{\mathrm{Re}}$$

至此，圆管压降的函数表达式为

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho v^2} = f_3\left(\mathrm{Re}, \frac{L}{D}, \frac{e}{D}\right)$$

π 定理只能求出影响流动的无量纲数，而不象R法那样可确定无量纲数之间的幂函数乘积的关系式。要确定具体的函数关联式，必须通过模型实验来解决。

§3 工程模型研究

流动相似理论是工程模型研究和实验的基础。模型和原型的相似及参数的测试与数据处理是工程模型研究的两个核心问题。

(1)模型与原型的相似

- 近似相似

①不是所有的相似准则数都能同时被满足的；

②甚至，有时连保证几何相似都是困难的。

- 实验方法

根据具体的问题，选择最重要的相似准则；确定模型尺寸及实验条件；得到无量纲准则数之间的关联式。

[例]一输油管，直径d=4cm，管段中设有阀门弯头等装置，为了测定其油液通过时的压力损失，拟在实验室用空气对该管进行模型试验。试确定：①若管中油流速度为4cm/s，则实验用的风速应取多少？②若用空气流试验时测得的压力损失为0.9N/cm²，则油液通过相应管段时的压力损失为多少？(已知$\rho_{油}$=900kg/m³，$\rho_{水}$=1.2kg/m³，t=20°C，$\nu_{油}$=0.01cm²/s，$\nu_{水}$=0.16cm²/s)

[解]按题意，应当保证流动的Re数相等和Eu数相等。

①由Re数相等：$(Vd/\nu)_{油} = (Vd/\nu)_{气}$

代入条件，因为试验用原管道，所以d不变：

$$V_{气} = 64\,cm/s$$

②由Eu数相等：

$$\left(\Delta p/\rho V^2\right)_{油} = \left(\Delta p/\rho V^2\right)_{气}$$

代入数值，求得 $\Delta p_{油} = 2.64\,N/cm^2$

[说明]请注意，有时问题需要考虑其他相似准则数，见课本例题4-4(p101)。

(2)参数测试及实验结果的整理

前面的例子说明了实验准备时，需要注意的问题。即考虑需要进行测试的无量纲数以及相应的准备工作。

根据所需测定的无量纲数，进行试验可以把无量纲数之间的关联式通过实验数据建立起来。通过这种具体的关联式，便可求出模型实验和原型之间的转换。

通过相似原理，不仅可以把难以展开的原型实验进行模型(或缩小或放大)实验，而且也极大地减少了所需测量的参数。

§4 流场测试技术

◎流动显示技术：

◎流场参数测量技术：

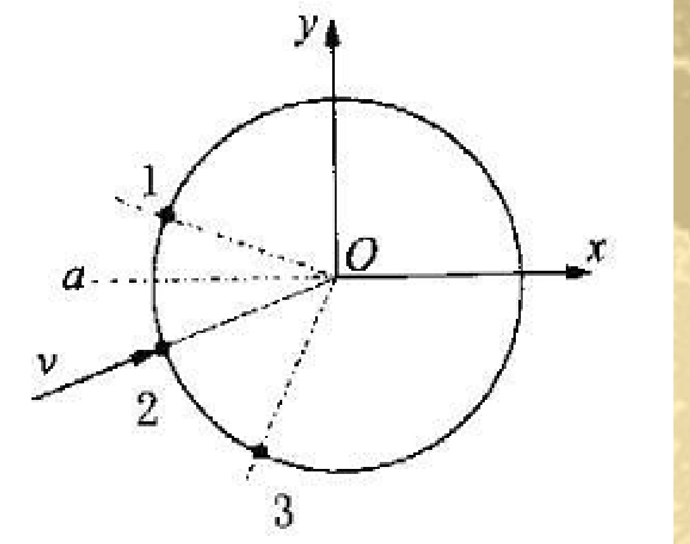
[速度场]

◆接触式——皮托管、三孔探针、五孔探针、热线风速仪和热膜风速仪

◆非接触式——LDV、高速摄影仪和PIV

三孔探针

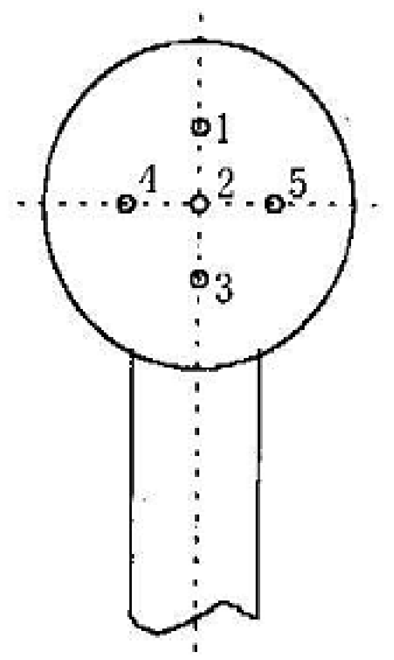
探针的感应头部由半球头与圆柱形针体所组成，离头部3~4倍管径处钻有三个测压孔，三个孔的轴线在圆柱的横截面上，方位如图，并通过孔道与压差计相连。两侧孔1、3与中心孔2对称，并相隔一定角度，检测到的压力p_1和p_3用来确定流动方向，孔2用于测量滞止压力p_2，测量时旋转探针使1、3孔的压力相等，则孔2所指的方向就是来流的方向。



三孔探针测速原理示意图

五孔探针

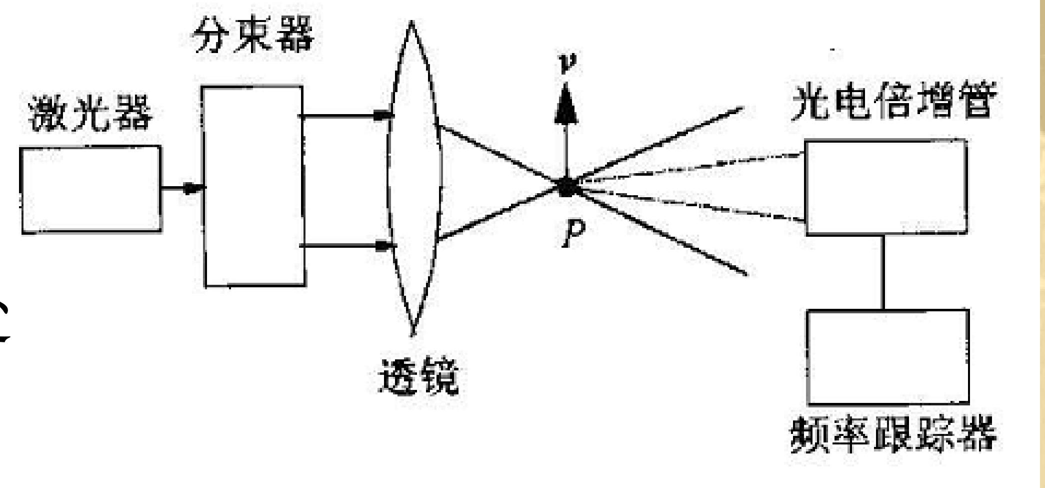
用于空间流动参数测量。感应球头上的五个孔分别与压差计相连，以测量压力。测量时绕支柄转动探针，使4、5孔的压力相等，测得来流的一个方位角，表明调整后的来流处于1、2、3孔所在的平面，再根据1、2、3孔的压力定出第二个来流角。



五孔探针的感压头

激光多普勒测速仪

基本原理是，当激光照射到跟随流体一起运动的微粒上时，激光被运动着的微粒所散射，散射光的频率将发生变化，此频率与入射光的频率之差称为多普勒频差，它与微粒速度成正比。如果微粒的跟随性好，则测出多普勒频差，也就等于测出了流速。



激光多普勒测速仪原理简图

激光多普勒测速仪包括光学系统和信号处理系统两部分。

[压力场的测量]

都是接触式的，用于测量流速的皮托管、三孔探针、五孔探针都可以用来测量压力场。

除这些外，还有压力扫描阀、数字编码压力传感器和压力巡检仪、多点压力测量仪等。它们都是多点测量，是通过电信号的转换来测压的。

- 作业

  P101-102

  Ex.4-1

  Ex.4-4

  Ex.4-5